Oberlin College Library
AUG 19 1924
Not to be taken

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.— postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.20, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

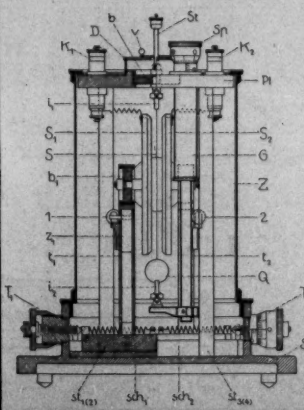
Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 13. Leipzig, 1. Juli 1924. No. 665. Printed in Germany. **25. Jahrgang.**

Phys.-mech. Institut von Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,

München.



Saiten-Elektrometer

nach Lutz-Edelmann (neue Form).

C. W. Lutz, Physik. Zeitschrift, 24. Jahrgang. 1923. Seite 166—170.

Katalog 30, Spezialliste No. 32 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.

G. E. Stechert & Co. in Leipzig, Hospitalstr. 10

kaufen stets gegen Bezahlung in **Dollars**

Wissenschaftliche Zeitschriften in vollständigen Reihen

z. B.

Annalen der Physik — Annalen der Chemie — Mathematische Annalen — Journal für praktische Chemie — Monatshefte für Chemie — Physikalische Zeitschrift — Zeitschrift für physikalische Chemie — Meteorologische Zeitschrift — Zeitschrift für Mathematik usw.

Angebote mit Preisangabe erbeten.

S. HIRZEL IN LEIPZIG

W. Moede

Experimentelle Massenpsychologie

Mit 16 Abb. 8°. (VI u. 239 S.) 1920.

Geh. G.-M. 4.—, $ —.95, geb. G.-M. 5.—, $ 1.20.

Der Betriebsleiter, der mit Arbeitermassen oder -gruppen zu tun hat, jeder, der Wirkungen auf die Massen auslösen will, alle werden in diesem Neuland von den Bäumen Früchte der Erkenntnis pflücken, die ihr geistiges Rüstzeug schärfen. Moede baut auf selbst erkanntem und versuchtem Tatsachenmaterial auf. Phantasieschlüsse sind ihm fremd. Und gerade deshalb ist seine Arbeit wertvoll. (Ingenieur-Zeitung.)

Bibliothek wird fortgesetzt.

Prismen, Linsen, Platten

aus

Kalkspat, Flußspat, Quarz, Steinsalz, Glas.

Gyps- und Glimmerpräparate.

Preisliste gratis.

R. Halle Nachfolger, Optisches Institut.

Berlin-Steglitz.

Einbanddecken zur Physikalischen Zeitschrift 1923 sind vorrätig und können zum Preise von G.-M. 5.— durch jede Buchhandlung oder vom Verlag S. Hirzel in Leipzig, Königstr. 2 bezogen werden.

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 13. 1. Juli 1924. Redaktionsschluß für No. 15 am 10. Juli 1924. 25. Jahrgang.

INHALT.

Originalmitteilungen:

K. Försterling, Zerstreuung der Röntgenstrahlen durch freie Elektronen. S. 313.

J. R. Katz, Röntgenspektroskopische Untersuchungen über das Wesen der Quellung bei Substanzen, die ein Faserdiagramm geben. S. 321.

L. Heis, Ein Manometer hoher Empfindlichkeit. S. 326.

F. J. v. Wiśniewski, Die p- und d-Terme des Lithiums. S. 330.

R. v. Hirsch, Einwirkung des Magnetfeldes auf die Polarisation des Kanalstrahlenlichtes. S. 333.

R. Gans, Bemerkung zur Theorie der Durchmesserbestimmung von Sternen mittels des Interferometers. S. 335.

Besprechungen:

W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie. S. 336.

Astronomischer Kalender für 1924. S. 336.

Berichtigung. S. 336.

Personalien. S. 336.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zerstreuung der Röntgenstrahlen durch freie Elektronen.

Von K. Försterling.

I.

Versuche über die Zerstreuung von Röntgen- und γ-Strahlen führten A. H. Compton[1]) zu der Überzeugung, daß die zerstreute Strahlung eine geringe Änderung der Wellenlänge gegenüber der primären Strahlung aufweise. Er selbst sowohl[2]) wie Debye[3]) suchten aus diesen Ergebnissen Schlüsse zu ziehen über die Wechselwirkung der elektromagnetischen Stellung mit einem freien Elektron. Beide Verfasser gelangen zu einer Deutung der Experimente auf Grund der Annahme der „Nadelstrahlung", d. h. die Abgabe von Strahlung durch ein Elektron soll nur in einer einzigen Richtung erfolgen, nicht in einer Kugelwelle. Allerdings blieb es Compton nicht verborgen, daß die Abhängigkeit der Wellenlänge der zerstreuten Strahlung von dem Winkel φ der Beobachtungsrichtung gegen den Primärstrahl formal durch die Formel des Dopplerschen Prinzips wiedergegeben werden kann, als ob die Wellen von einer mit der Geschwindigkeit v bewegten Strahlungsquelle ausgingen. In einer neuen, soeben erschienenen Arbeit[4]) wird dieser Gedankengang noch um einen Schritt weiter verfolgt, indem die Hypothese geprüft wird, daß die zerstreute Energie eine Kugelwelle von der Energie E und dem Impuls $\frac{E}{c^2} v$ sei und so der Ansatz (S. 319) gewonnen. Indessen ist diese Einführung der Geschwindigkeit v rein formal, und aus diesem Grunde wird dieser Ansatz sogleich vom Verfasser abgelehnt, zu Unrecht wie uns scheint.

Um nun experimentell zwischen den verschiedenen Theorien — der Maxwellschen Theorie, der Quantentheorie der Kugelwelle und der Quantentheorie der Nadelstrahlung — entscheiden zu können, ist es nötig, zunächst die Konsequenzen der Grundannahmen dieser Theorien zu entwickeln. In den Paragraphen I bis III geschieht dies in einer für Röntgenstrahlen gültigen Näherung, da uns diese auf Grund der Maxwellschen Theorie gestattet, einen Einblick in den Mechanismus des Vorganges zu gewinnen. Da diese Annäherung für harte γ-Strahlen, wie sie beim radioaktiven Zerfall auftreten, nicht ausreicht, werden im IV. Abschnitte die exakten Formeln angegeben, wie sie sich allein aus der Anwendung des Impuls- und Energiesatzes ergeben. Für die Maxwellsche Theorie sind die hier in Frage kommenden Beziehungen durch die Rechnungen M. Abrahams bekannt. Sie übertragen sich durch Einführung des Planckschen Energiequantums sogleich auf die Quantentheorie der Kugelwelle. Für die Theorie der Nadelstrahlung ist dann auf die Ansätze von Compton und Debye zurückzugreifen.

Eine Diskussion der Beobachtungen an der Hand der gewonnenen Formeln muß einer späteren Mitteilung vorbehalten bleiben.

Im Folgenden soll zunächst die Umwandlung der Energie einer ebenen homogenen Lichtwelle durch ein freies Elektron nach der Maxwellschen Theorie behandelt werden. Das Elektron mag zur Zeit $t = 0$ ruhen. Wir nehmen an, daß die Welle sich $\parallel Z$ fortpflanzt und der

1) A. H. Compton, Bull. Nat. Res. Council. **20**, 19, 1922.
2) A. H. Compton, Phys. Rev. **21**, 483, 1923.
3) P. Debye, Physik. Zeitschr. **24**, 161, 1923.
4) A. H. Compton, Phys. Rev. **23**, 442, 1924.

elektrische Vektor X weist. Diese elektrische Kraft setzt das Elektron zunächst in Bewegung, wobei die vom Elektron emittierte Strahlung sich durch eine dämpfende Kraft bemerkbar macht, die sich zu:

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d^3x}{dt^3}$$

ergibt[1]). Die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}_x$ ist nun von einer gleich großen magnetischen Kraft $\mathfrak{H}_y$ begleitet, welche infolge der Biot-Savartschen Kraft dem Elektron eine Beschleunigung $\parallel Z$ erteilt. Diese Beschleunigung sehen wir als so klein an, daß wir zunächst die Strahlungsdämpfung, welche von ihr herrührt, vernachlässigen, und ferner die Glieder:

$$\frac{e}{c}\left[\frac{dz}{dt}, \mathfrak{H}\right],$$

sowie alle weiteren höherer Ordnung fortlassen.

Da die Welle das Elektron in der Richtung ihrer Normalen, der Z-Achse, in Bewegung setzt, ist strenggenommen die Frequenz bezogen auf das Elektron nicht konstant; da wir uns indessen auf Glieder erster Ordnung in dz/dt beschränken, können wir die Dopplerkorrektion bei der Lösung der Bewegungsgleichungen vernachlässigen.

In unserer Näherung gelten also die Gleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d^3x}{dt^3} = e\mathfrak{E}_x,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{e}{c}\frac{dx}{dt}\mathfrak{H}_y.$$

$$\mathfrak{E}_x = A e^{i\omega t},\ \mathfrak{H}_y = \mathfrak{E}_x$$

Führen wir periodische Lösungen ein:

$$\frac{dx}{dt} = a e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \delta\right)},$$

so haben wir mit der Abkürzung:

$$\gamma = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\omega^2 = \frac{8\pi^2}{3}\frac{e}{mc}\frac{c}{\lambda^2};$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e/m}{i\omega+\gamma}\mathfrak{E}_x = \frac{e}{m}\frac{\gamma - i\omega}{\omega^2+\gamma^2}\mathfrak{E}_x,$$

woraus:

$$\operatorname{tg}\delta = -\operatorname{cotg}\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\gamma}{\omega},\quad a = \frac{e/m}{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}A,$$

also, näherungsweise bei der kleinen Strahlungsdämpfung γ:

$$\delta = \frac{\gamma}{\omega},\quad a = \frac{e/m}{\omega}A$$

1) M. Abraham, Theorie d. Elektrizität II, S. 68 (III. Auflage). Leipzig 1914.

folgt. Die reelle Geschwindigkeit wird dann:

$$\frac{dx}{dt} = a\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \delta\right) = -a\sin(\omega t + \delta) =$$

$$= -a\left|\sin\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\cos\omega t\right|,$$

indem γ^2/ω^2 wieder vernachlässigt wird.

Hiermit gehen wir in die zweite Gleichung, die in reeller Form übergeht in:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = +\frac{ea}{c}A\cos\omega t\left(\sin\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\cos\omega t\right),$$

also:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{ea}{mc\omega}A\left[\frac{1}{2}\sin^2\omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{2\omega}\sin\omega t\cos\omega t + \frac{\gamma}{2}t\right].$$

Da $\frac{dz}{dt}$ für $t = 0$ verschwinden muß, so ist die Integrationskonstante Null gesetzt. In etwas anderer Schreibweise haben wir:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{e^2}{m^2c\omega^2}A^2\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos\left(2\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\right) + \frac{\gamma}{2}t\right]. \tag{1}$$

Infolge des ersten Gliedes bewegt sich also das Elektron mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor der Welle her; das zweite Glied gibt zu überlagerten Schwingungen mit der Frequenz 2ω Veranlassung. Für große t können diese beiden Glieder, die schon von J. J. Thomson abgeleitet sind, neben dem letzten fortbleiben, und wir erhalten:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{e^2\gamma}{2c m^2\omega^2}A^2 t = \frac{1}{3}\frac{e^4}{mc^4}A^2 t. \tag{1a}$$

Dem Faktor von t können wir eine einfache Form geben. Die in dem Zeitraum t vom Elektron emittierte Energie E_t ist nämlich durch die Arbeit der dämpfenden Kraft gegeben zu:

$$E_t = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_0^t \frac{d^3x}{dt^3}dx = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega^2}{c^3}\int_0^t\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt$$

und dies ist näherungsweise:

$$E_t = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega^2 a^2}{c^3}\int_0^t \sin^2\omega t\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}A^2\int_0^t \sin^2\omega t\,dt.$$

Wenn wir das Integral über eine ganze Zahl von Perioden erstrecken, so wird:

$$E_t = \frac{1}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}t. \tag{2}$$

Führen wir diesen Ausdruck in die Formel für $\frac{dz}{dt}$ ein, so ist:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{E_t}{mc}. \tag{3}$$

E_t ist die vom Elektron im Zeitraum o bis t emittierte Energie. Da wir $\frac{dz}{dt}$ als klein voraussetzen, so unterscheidet sie sich sehr wenig von der der einfallenden Welle entnommenen Energie E_{0t}. Da wir uns bei der Berechnung von $\frac{dz}{dt}$ auf Größen erster Ordnung beschränkt haben, so können wir auch schreiben:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{E_{0t}}{mc}. \tag{3a}$$

Die vom Elektron emittierte Welle hat nun nicht dieselbe Frequenz wie die einfallende, denn es ist die Dopplersche Korrektion anzubringen. Wohl aber haben beide Wellen dieselbe Frequenz ν', wenn man sie vom bewegten Elektron aus beurteilt. Ist φ der Winkel des Strahls gegen die Bewegungsrichtung, in unseren Falle die z-Achse, so ist für die einfallende Welle, deren Frequenz ν_0 ist ($\omega = 2\pi\nu$):

$$\nu' = \nu_0(1-\beta) \qquad \beta = \frac{1}{c}\frac{dz}{dt}.$$

In der emittierten Welle gilt für einen Strahl in der Richtung φ:

$$\nu' = \nu(1-\beta\cos\varphi),$$

wenn ν die in dieser Richtung beobachtete Frequenz ist. Daher gilt:

$$\nu = \nu_0 \frac{1-\beta}{1-\beta\cos\varphi} = \nu_0\left(1 - 2\beta\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder mit Einführung von $c\beta = \frac{dz}{dt}$ und den Wert (3a) für $\frac{dz}{dt}$:

$$\nu_0 - \nu = 2\nu_0\beta\sin\frac{\varphi}{2} = \nu_0\frac{2E_{0t}}{mc^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}. \tag{4}$$

Je länger also die Einwirkung der Welle auf das freie Elektron währt, umso größer wird die Frequenzänderung der zerstreuten Strahlung gegenüber der einfallenden. —

Wir kommen nun zur Berechnung der zerstreuten Wellenenergie und deren Abhängigkeit von der Richtung φ. Wir haben also den zeitlichen Mittelwert des Poyntingschen Vektors:

$$\bar{\mathfrak{S}} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \frac{\mathfrak{r}}{r}\frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}^2,$$

wenn $\mathfrak{r}$ der Vektor vom Punkte des Entsendens zum Beobachter, und r sein absoluter Betrag ist.

In unserem Falle liegt die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ immer in der Richtung der Fortschreitungsrichtung der Welle ($\parallel Z$), und die Beschleunigung des Elektrons, soweit wir sie in unserer Näherung für die Ausstrahlung zu berücksichtigen haben, $\parallel$ der einfallenden elektrischen Feldstärke der einfallenden Welle, die transversal, also $\perp Z$ ist. Sei ξ der Winkel, welcher die Ebene, in der die Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{r}$ liegen, mit derjenigen, die $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{r}$ enthält, bildet, so gilt[1] für die ausgestrahlte Feldstärke $\mathfrak{E}'$:

$$\mathfrak{E}'^2 = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{r^2c^4(1-\beta\cos\varphi)^6}$$

$$((1-\beta\cos\varphi)^2 - \sin^2\varphi\cos^2\xi); \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Wir wollen nun annehmen, daß die einfallende Welle unpolarisiert ist, dann ist der mittlere Beitrag eines Elektrons zu $\bar{\mathfrak{S}}$ gegeben durch:

$$|\bar{\mathfrak{S}}| = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{4\pi c^3}\left|\frac{1}{(1-\beta\cos\varphi)^4} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^6}\right| \tag{5}$$

In dieser Formel ist β mit der Zeit veränderlich, wir wollen statt dessen einen Mittelwert $\bar{\beta}$ einführen, den wir als konstant ansehen. Die Strahlungsdichte:

$$|\bar{\mathfrak{S}}| = C\left|\frac{1}{(1-\bar{\beta}\cos\varphi)^4} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi}{(1-\bar{\beta}\cos\varphi)^6}\right|$$

stellt nun noch nicht die gesuchte Größe dar. Dieser Ausdruck würde nämlich voraussetzen, daß die Emission von einem dauernd bewegten Elektron erfolgt. In Wirklichkeit wird aber das Elektron durch Zusammenstoß zur Ruhe kommen und nach einiger Zeit von neuem beschleunigt werden. Im Mittel mögen jedesmal N-Wellenberge emittiert werden. Wir betrachten jetzt ein Volumelement, welches groß ist gegenüber der freien Weglänge der Elektronen, und beobachten in großer Entfernung. Die N-Wellenlängen haben dann je nach der Beobachtungsrichtung φ eine verschiedene Länge, welche proportional $(1-\beta\cos\varphi)$ ist. Der radiale Abstand zweier aufeinanderfolgenden Wellenzüge ist also umso größer, je größer die Energiedichte eines Wellenzuges ist. Wenn wir nun beobachten, so treffen sehr viele Wellenzüge nacheinander beim Beobachter ein, welcher die mittlere Strahlungsdichte mißt $|\bar{\mathfrak{S}}|$. Diese erhält man aus $|\bar{\mathfrak{S}}|$:

$$\bar{\mathfrak{S}} = |\bar{\mathfrak{S}}|(1-\bar{\beta}\cos\varphi)$$

$$= C\left|\frac{1}{(1-\bar{\beta}\cos\varphi)^3} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi}{(1-\bar{\beta}\cos\varphi)^5}\right|. \tag{6}$$

1) M. Abraham, Theorie d. Elektrizität II, S. 107. Leipzig 1914.

Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieser Formel ist, daß die einfallende Strahlung unpolarisiert ist. Um $\bar{\beta}$ zu berechnen, müßte man die mittlere freie Weglänge der Elektronen kennen.

Für $\bar{\beta} = 0$ wird:

$$\mathfrak{S} = C\frac{2-\sin^2\varphi}{2} = C\frac{1+\cos^2\varphi}{2} \qquad (6a)$$

ein Ausdruck, den Thomson für die Zerstreuung der Röntgenstrahlen angegeben hat.

II.

Wir haben uns bisher auf den Boden der Maxwellschen Theorie gestellt und suchen jetzt von hier aus den Übergang zur Quantentheorie zu finden.

Wir nehmen an, daß die Energie in ganzen Quanten $h\nu$ emittiert und absorbiert wird. Den Vorgang denken wir uns so, daß das Elektron zunächst ein Energiequantum $h\nu_0$ der Welle entnimmt und in eine uns unbekannte Form der Energie überführt und daß dann die Emission wieder eines Quantums erfolgt. Diese letztere würde bei einem ruhenden Elektron in Gestalt einer Kugelwelle vor sich gehen. Wir gelangen zu den entsprechenden Formeln, wenn wir unser $E_0 t$ durch $h\nu_0$ ersetzen. (Daß ein Elektron aus der Welle mehr als ein Quantum $h\nu_0$ aufnimmt, ist sehr unwahrscheinlich, und soll deshalb beiseite gelassen werden.) Dann wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{h\nu_0}{mc}, \\ \nu_0 - \nu &= \frac{2h\nu_0^2}{mc^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}. \end{aligned}\right| \qquad (7a)$$

Die Intensität der emittierten Strahlungsdichte von der Richtung ist dann ebenfalls durch den Ausdruck:

$$\mathfrak{S} = C\left|\frac{1}{(1-\beta\cos\varphi)^3} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5}\right| \qquad (7b)$$

gegeben, wo aber nun $c\beta$ eine konstante Geschwindigkeit, nämlich:

$$\beta = \frac{1}{c}\frac{dz}{dt} = \frac{h\nu_0}{mc^2} \qquad (7c)$$

ist.

III.

Annahme einer gerichteten Ausstrahlung[1]) (Nadelstrahlung).

Die Emission der Strahlung erfolge ohne Rücksicht auf die Symmetrie des Vorganges in einer einzigen, durch den Winkel φ gegen die Richtung des einfallenden Strahls definierten Richtung. Um den Impulssatz aufrecht zu erhalten, kann dann die durch die Welle hervorgerufene Bewegung des Elektrons nicht mit der Fortschreitungsrichtung der einfallenden Welle zusammenfallen, sondern bildet einen Winkel ϑ mit ihr. Vernachlässigen wir die Relativkorrektion, so haben wir als Energie- und Impulssatz:

$$E_0 = E + \tfrac{1}{2}mv^2, \qquad (8a)$$

$$\frac{E_0}{c} = \frac{E}{c}\cos\varphi + mv\cos\vartheta, \qquad (8b)$$

$$0 = \frac{E}{c}\sin\varphi + mv\sin\vartheta, \qquad (8c)$$

woraus die beiden letzten Gleichungen ergeben:

$$\frac{E_0^2}{c^2} + \frac{E^2}{c^2} - \frac{2E_0E}{c^2}\cos\varphi = m^2v^2. \qquad (8d)$$

Ferner wird angenommen, daß die Frequenzen der Strahlung stets der Bohr-Planckschen Beziehung:

$$E_0 = h\nu_0, \quad E = h\nu \qquad (8e)$$

genügen.

Wir begnügen uns zunächst mit der bisher innegehaltenen Näherung, daß v eine relativ kleine Größe ist, so daß $\frac{1}{2}mv^2$ klein neben E_0 und damit E und E_0 nahezu gleich ist. Dann ergibt (a) und (d) sogleich:

$$\left.\begin{aligned} E_0 - E &= \frac{1}{2mc^2}(E_0^2 + E^2 - 2EE_0\cos\varphi) \\ &= \frac{E_0^2}{mc^2}(1-\cos\varphi) = \frac{2E_0^2}{mc^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi \end{aligned}\right| \qquad (8f)$$

und mit Hilfe von e:

$$\nu_0 - \nu = \frac{2h\nu_0^2}{mc^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi. \qquad (8g)$$

Aus (a) und (f) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2E_0^2}{mc^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi &= \tfrac{1}{2}mv^2, \\ v &= \frac{2E_0}{mc}\sin\frac{\varphi}{2} \end{aligned}\right| \qquad (8h)$$

und schließlich ergibt (h) und (c) kombiniert:

$$-\frac{E}{c}\sin\varphi = m\frac{2E_0}{mc}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\vartheta$$

und näherungsweise mit $E_0 = E$:

$$-2\sin\vartheta = \frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 2\cos\frac{\varphi}{2},$$

also:

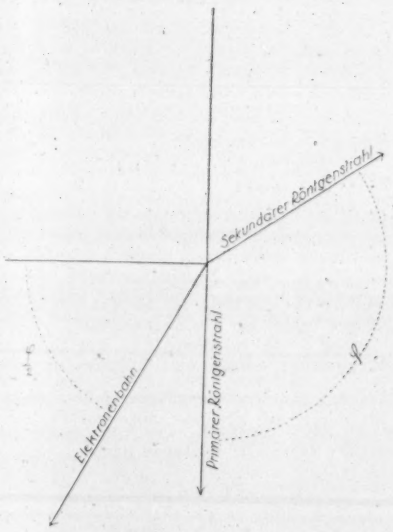
$$\vartheta = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \text{ oder } +\vartheta = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Aus (h) folgt nun, daß $\cos\vartheta$ immer >0 sein muß, da $E_0 > E$, also:

$$\frac{1}{c}(E_0 - E\cos\varphi) > 0, \quad \text{also } mv\cos\vartheta > 0$$

1) Vgl. die Zitate in der Einleitung.

und da $\cos\vartheta = \cos(-\vartheta)$, so ergibt sich, daß die Festsetzung $\vartheta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}$ dieser Bedingung genügt, wenn wir φ zwischen 0 und $+180^0$ laufen lassen. Die Richtung des Primärstrahls ist dann $\vartheta = 0$ (s. Figur).



Für die bei einem Elementarprozeß in der Richtung φ ausgesandte Energie der Wellenstrahlung ergibt sich mit der Abkürzung:

$$\beta = \frac{h\nu_0}{mc^2},$$

$$\frac{E}{E_0} = \frac{h\nu}{h\nu_0} = 1 - 2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Diese Formel ergibt nun noch nicht die beobachtete Strahlungsintensität in ihrer Abhängigkeit von der Richtung. Es wird ja der Mittelwert über viele Elementarprozesse beobachtet, und da der Vorgang in bezug auf die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle eine ausgezeichnete Richtung besitzt, wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die sekundäre Strahlung der Welle gerade in der Richtung φ erfolgt, eben von φ noch abhängen. Um zu einem Ansatz für diese Wahrscheinlichkeit zu gelangen, müssen wir nun Hypothesen, etwa das Korrespondenzprinzip von Bohr heranziehen.

A. Wir könnten aber, etwa wie Kramers es bei der Spektroskopie der Wasserstoffatome gemacht hat, die Intensität der Strahlung nach der Maxwellschen Theorie berechnen und den so erlangten Ausdruck als maßgebend ansehen für die Emission sehr vieler Elektronen. Wir würden dann also wie oben erhalten:

$$\bar{\mathfrak{E}} = C\left|\frac{1}{(1-\beta\cos\varphi)^3} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5}\right|, \qquad \beta = \frac{h\nu_0}{mc^2}. \tag{9a}$$

B. In anderer Weise zieht Debye die Korrespondenz zwischen Quantenhypothese und Maxwellscher Theorie heran. Er geht von der Zerstreuung des Lichtes durch ein ruhendes Elektron aus. Wir müßten uns also das Elektron in einer Ebene $z = \text{konst.}$ festgehalten denken. Dann ist nach 6a die vom Elektron emittierte Strahlungsdichte gegeben durch:

$$C\frac{1+\cos^2\varphi}{2}.$$

Diesem Ausdruck proportional setzt Debye die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elementarprozeß derart verläuft, daß die emittierte Wellenstrahlung in der Richtung φ emittiert wird. Die mittlere Strahlungsdichte wäre also gegeben durch:

$$C'\frac{1+\cos^2\varphi}{2}E = c(1+\cos^2\varphi)\left(1-2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\right), \tag{9b}$$

wo C' und c neue Konstanten sind, die natürlich umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung vom zerstreuenden Volumelement sind.

C. Von anderen Überlegungen geht A. H. Compton aus. Er hatte bemerkt, daß die Frequenzänderung formal einem Dopplereffekt äquivalent ist. Er setzt daher die beobachtete Strahlungsdichte eines zerstreuenden Volumenelementes in Korrespondenz mit der Emission einer bewegten Lichtquelle. Diese Lichtquelle, durch die das strahlende Volumenelement formal ersetzt wird, denkt sich Compton durch eine Lorentz-Transformation „zur Ruhe" transformiert, wobei φ in φ' übergehen mag und durch die bekannte Formel:

$$\sin\varphi = (1-\beta\cos\varphi)\sin\varphi'$$

gegeben ist, und die Frequenz:

$$\nu' = \nu(1-\beta\cos\varphi).$$

In diesem gestrichenen Koordinatensystem soll nun die Zerstreuung so erfolgen, wie es nach der Maxwellschen Theorie geschehen soll, d. h. in einen Öffnungswinkel $\sin\varphi'\,d\varphi'$ soll die Strahlung proportional

$$(1+\cos^2\varphi')\sin\varphi'\,d\varphi'$$

sein.

Geht man zu den ungestrichenen Größen über, so wäre die Strahlung proportional zu:

$$\frac{1+\cos^2\varphi-4\beta\cos\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^4}\sin\varphi\,d\varphi.$$

Berechnet man die auf die Flächeneinheit fallende Energie, so ist das auf S. 315 Gesagte in Betracht zu ziehen. Es werden nämlich in der Zeiteinheit ebensoviel Quanten emittiert werden, wie von der Fläche aufgefangen werden. Setzt man noch die Energie eines Quantums gleich

$$h\nu = h\frac{\nu_0}{1+2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

so erhält man die aufgefangene Strahlungsintensität zu:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{S}} &= c\,\frac{\nu_0}{1+2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{1+\cos^2\varphi-4\beta\cos\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^4},\\ &= 2c\,\frac{\nu_0}{(1+\beta)-\beta\cos\varphi}\left|\frac{1}{(1-\beta\cos\varphi)^2}-\frac{\frac{1}{2}\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^4}\right|,\\ &= 2c\,\nu_0(1-\beta)\left|\frac{1}{(1-\beta\cos\varphi)^3}-\frac{\frac{1}{2}\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5}\right|.\end{aligned}\qquad(9c)$$

Diese Formel (9c) unterscheidet sich, was die Abhängigkeit von φ anbetrifft, gar nicht von (9a), die wir direkt aus dem Korrespondenzprinzip erschlossen haben.

IV.

Wir haben bisher die Größe $\frac{E_0}{mc^2}$ als klein vorausgesetzt, eine Annahme, die nicht immer gerechtfertigt ist. Handelt es sich zum Beispiel um γ-Strahlen von RaC, so ist $\lambda = 0{,}022$ Å. nach Compton (S. 499) zu setzen. Hier wird:

$$\frac{h\nu}{mc^2} = \frac{h}{mc\lambda} = 1{,}09$$

und dieses würde, wenn man unsere Näherung anwenden wollte, auf Überlichtgeschwindigkeit des Elektrons führen. Wir lassen also unsere Annahme, daß β klein sein soll, fallen und verzichten darauf, einen genauen Einblick in die Zusammenhänge nach der Maxwellschen Theorie zu gewinnen. Vielmehr legen wir zur Berechnung von β lediglich den Impuls- und Energiesatz, sowie die bekannten von M. Abraham gewonnenen Resultate für eine mit beliebiger Geschwindigkeit bewegten Punktladung zugrunde. Wir können uns hier immer noch in hinreichender Annäherung auf den Fall beschränken, daß das Elektron seine Schwingungen transversal zu seiner Fortschreitungsrichtung ausführt. M. Abraham findet dann für die in ein und demselben Zeitelement ausgestrahlte Energie dE und Bewegungsgröße $d\mathfrak{G}$ den einfachen Zusammenhang:

$$d\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{v}}{c^2}\,dE, \qquad (10)$$

wobei $\mathfrak{v}$ die zur Zeit der Ausstrahlung gültige Geschwindigkeit ist, während der Impuls- und Energieverlust der erregenden Welle:

$$d\mathfrak{G}_0 = \frac{1}{c}\,dE_0$$

ist.

Der Impuls der ausgesandten Strahlung sowohl wie der des Elektrons fällt aus Symmetriegründen immer mit der Strahlrichtung der einfallenden Welle zusammen. G und G_0 seien die absoluten Beträge des Impulses der einfallenden und zerstreuten Welle, und $\frac{\mathfrak{v}}{c}$ werde wieder mit β abgekürzt. Die Energiegleichung und der Impulssatz verlangen dann:

$$\begin{aligned}dE_0 &= dE + d\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\\ dG_0 &= dG + d\frac{m_0c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},\end{aligned}\qquad(11)$$

oder:

$$dE_0 = dE + m_0c^2\,d\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\frac{1}{\beta}\,dE_0 = dE + \frac{m_0c^2}{\beta}\,d\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

woraus:

$$dE_0 = m_0c^2\,\frac{1}{(1-\beta)\sqrt{1-\beta^2}}\,d\beta = m_0c^2\,\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^3}\,d\beta$$

folgt, so daß:

$$E_0 = m_0c^2\left|\frac{\beta+1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right|,$$

da $E_0 = 0$ ist, wenn $\beta = 0$.

Hieraus findet man zunächst:

$$\left(\frac{E_0}{m_0c^2}+1\right)^2 = \frac{1+2\beta+\beta^2}{1-\beta^2} = 1+2\beta\frac{1+\beta}{1-\beta^2} = 1+\frac{2\beta}{1-\beta}.$$

Also:

$$\beta = \frac{\frac{E_0}{m_0c^2}\left(\frac{E_0}{m_0c^2}+2\right)}{\left(\frac{E_0}{m_0c^2}+1\right)^2+1} \qquad (12)$$

Dieser Ausdruck mit $\beta = \frac{v}{c}$ bestimmt die Geschwindigkeit des Elektrons nach der Maxwellschen Theorie. β nimmt mit der Zeit zu, da E_0, die vom Elektron dem Primärstrahl entzogene Energie, mit der Zeit wächst. Für kleine E_0/m_0c^2 geht unsere Gleichung in die im ersten Abschnitt abgeleitete:

$$\beta = \frac{E_0}{m_0c^2}$$

über.

Wenden wir uns jetzt zu der unter II. besprochenen Quantentheorie und nehmen wie dort an, daß das Elektron die Strahlungsenergie zum Teil in Bewegungsenergie, zum Teil als eine unbekannte Energieform aufnimmt und letztere nach Absorption eines $h\nu_0$ wieder bei einer konstanten Geschwindigkeit (konstantem β) abgibt. Die Ausstrahlung eines einzelnen Elektrons soll wieder eine Kugelwelle in Korrespondenz mit der Maxwellschen Theorie sein. Wir erhalten dann an Stelle der Differentialbeziehungen zwischen den Impuls- und Energiegrößen die integralen:

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= E + m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right),\\ \frac{E_0}{c} &= \beta\frac{E}{c} + m_0c\,\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

woraus sogleich:

$$E_0 + m_0c^2 = \frac{1}{\beta}E_0,$$

also:

$$\beta = \frac{E_0/m_0c^2}{1+E_0/m_0c^2} = \frac{h\nu_0}{m_0c^2+h\nu_0} \qquad (14)$$

folgt, also ein anderer Ausdruck als aus der Maxwellschen Theorie, der aber für kleine E_0/m_0c^2 mit diesem identisch wird.

Die zerstreute Welle besitzt eine Frequenz ν, welche gegeben ist durch:

$$\nu = \nu_0\frac{1-\beta}{1-\beta\cos\varphi} = \frac{\nu_0}{1+\frac{\beta}{1-\beta}(1-\cos\varphi)}.$$

Für die Annahme einer ungerichteten Quantenstrahlung speziell würde sich ergeben:

$$\nu = \nu_0\frac{1}{1+\frac{h\nu_0}{m_0c^2}(1-\cos\varphi)}. \qquad (15)$$

Zu genau derselben Beziehung gelangt man mit Compton und Debye, wenn man von der Annahme der Nadelstrahlung ausgeht, für welche die Impuls- und Energiegleichung die strenge Form haben:

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= E + m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right),\\ \frac{E_0}{c} &= \frac{E}{c}\cos\varphi + \frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\vartheta,\\ 0 &= \frac{E}{c}\sin\varphi + \frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\vartheta,\\ E_0 &= h\nu_0; \quad E = h\nu. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Um die Abhängigkeit der zerstreuten Energie von der Richtung φ zu finden, haben wir, solange wir uns auf dem Boden der Maxwellschen Theorie oder der Annahme einer ungerichteten Quantenstrahlung befinden, von den Abrahamschen Ausdrücken für die Strahlung eines transversal schwingenden Elektrons auszugehen, wie wir es oben getan haben (S. 315). Unter Berücksichtigung des daselbst Gesagten erhalten wir bei einer konstanten mittleren Geschwindigkeit $\bar\beta$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{S}} &= C\,\frac{2(1-\bar\beta\cos\varphi)^2-(1-\bar\beta^2)\sin^2\varphi}{(1-\bar\beta\cos\varphi)^5},\\ &= C\,\frac{(1+\beta^2)(1+\cos^2\varphi)-4\beta\cos\varphi}{(1-\bar\beta\cos\varphi)^5}, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

In der Maxwellschen Theorie wäre dieser Ausdruck nur soweit gültig, als $\bar\beta$ als „mittlere Geschwindigkeit" eingeführt werden kann: für die Annahme einer ungerichteten Quantenstrahlung wäre jetzt:

$$\bar\beta = \frac{h\nu_0}{h\nu_0 + m_0c^2} \qquad (18)$$

und die Abhängigkeit der Intensität der sekundären Röntgenstrahlung von φ wäre genau dieselbe wie bei Compton.

Das Verhältnis der Strahlungsintensität in der Richtung $\varphi = 0 : |\bar{\mathfrak{S}}|_0$ zu der in der Richtung $\varphi = \pi : |\bar{\mathfrak{S}}|_\pi$ ist:

$$\frac{\bar{\mathfrak{S}}_0}{\bar{\mathfrak{S}}_\pi} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^3 = \left(\frac{2h\nu_0+m_0c^2}{m_0c^2}\right)^3 = \left(1+2\frac{h\nu_0}{m_0c^2}\right)^3$$

und für $\lambda = 0{,}02$ Å., wo $\frac{h\nu_0}{m_0c^2}$ rund $= 1$ ist:

$$\frac{\bar{\mathfrak{S}}_0}{\bar{\mathfrak{S}}_\pi} = 27.$$

Der Ansatz von Debye lautet mit Berücksichtigung von Gliedern der Ordnung β^2:

$$\bar{\mathfrak{S}} = C\,\frac{1+\cos^2\varphi}{1+\frac{h\nu_0}{m_0c^2}(1-\cos\varphi)}. \qquad (19)$$

Hier wäre also:

$$\frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_\varphi} = 1 + 2\frac{h\nu_0}{m_0 c^2} = 3.$$

Der Abfall der Intensität der zerstreuten Röntgenstrahlung mit wachsendem φ wäre also viel langsamer.

Zum Schluß geben wir noch die kinetische Energie T der ausgelösten Elektronen als abhängig vom Winkel φ der ausgesandten Nadelstrahlung nach Debye an:

$$T = h\nu_0 \frac{2h\nu_0 \sin^2\frac{\varphi}{2}}{m_0 c^2 + 2h\nu_0 \sin^2\frac{\varphi}{2}}. \qquad (20)$$

Die Richtung der emittierten Elektronen ergibt sich aus der folgenden Beziehung:

$$\operatorname{tg}\vartheta' = -\frac{m_0 c^2}{h\nu_0 + m_0 c^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}. \qquad (21)$$

Hierin ist ϑ' der Winkel, welchen die zur Richtung der Elektronen entgegengesetzte Richtung $(-v)$ mit dem Primärstrahl bildet, und es ist:

$$\frac{\pi}{2} < \vartheta' < \frac{3\pi}{2}.$$

Für unseren Fall $\lambda = 0{,}02$ Å. wäre also rund:

$$\operatorname{tg}\vartheta' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}.$$

Folgende Tabelle veranschaulicht die Verhältnisse: (ϑ Winkel, Elektronenbahn — Primärstrahl).

φ	T	ϑ'	ϑ
0	0	90°	90°
90	$\frac{h\nu_0}{2}$	150°	30°
180	$\frac{2}{3}h\nu_0$	180°	0°

Inwieweit ist nun eine experimentelle Entscheidung zwischen den 3 hier dargelegten Theorien möglich?

Genau wie beim Bohrschen Modell des Wasserstoffatoms unterscheidet sich hier ebenfalls die Maxwellsche Theorie von der Quantentheorie dadurch, daß die Maxwellsche Theorie eine kontinuierliche Reihe von Frequenzen für das zerstreute Licht erwarten läßt, wo die Quantentheorien eine scharf definierte Frequenz geben. Außerdem ist sehr wahrscheinlich die Frequenzänderung nach der Maxwellschen Theorie sehr viel kleiner als nach den Quantentheorien. Hierdurch ist experimentell relativ einfach eine Entscheidung darüber zu treffen, nach welcher Theorie die Ausstrahlung in Wirklichkeit erfolgt.

Die beiden Quantentheorien ergeben in unserer Näherung für die Frequenzänderung genau die gleichen Gesetze, wenn man die Comptonsche Formel zugrunde legt, auch für die Abhängigkeit der zerstreuten Wellenenergie von der Richtung des beobachteten Strahls gegen den Primärstrahl.

Aus der Beobachtung der zerstreuten Wellenstrahlung kann man also niemals eine Entscheidung darüber gewinnen, ob der Elementarprozeß eine Nadelstrahlung oder eine Kugelwelle liefert. Um hierüber zu entscheiden, ist man auf die Beobachtung der Geschwindigkeit der Elektronen angewiesen, welche diese beim Zerstreuen der Strahlung erhalten. Es verlangt nämlich die Nadelstrahlung, daß die Geschwindigkeiten dieser Elektronen über alle möglichen Richtungen, welche mit der des Primärstrahls einen kleineren Winkel als 90° einschließen, verteilt sind.

Diese Verteilung ist umso gleichmäßiger, je weicher die primären Strahlen sind.

Wird dagegen das Energiequantum in Gestalt einer Kugelwelle in den Äther entsandt, so ist die Geschwindigkeit aller Elektronen der Richtung des Primärstrahls parallel.

Hier wäre also eine Entscheidung denkbar. Indessen ist Voraussetzung, daß die Elektronen wirklich vollkommen frei sind. Müssen sie erst aus den Atomen freigemacht werden, so kann sehr wohl Impuls an den Kern abgegeben werden, und die Keplerbewegung eines Elektrons, welches auf einer Hyperbel den Kern umfliegt, lehrt, daß die Richtungsänderung des Impulses, also die Geschwindigkeit des Elektrons, sehr groß sein kann, ohne daß eine nennenswerte Energie vom Elektron auf den Kern übergeht.

Beobachtungen, bei welchen die auffallende Strahlung die Elektronen erst aus den Atomen frei machen muß, können also wohl die Theorie der Nadelstrahlung, niemals aber die Quantentheorie der Kugelwelle widerlegen.

Die Maximalgeschwindigkeit der ausgelösten Elektronen ist nach der Theorie der Nadelstrahlung für Röntgenstrahlen doppelt so groß als bei Annahme einer emittierten sekundären Kugelwelle, so daß möglicherweise hierin ein Kriterium zwischen diesen beiden Auffassungen gefunden werden könnte.

Jena, Physikal. Institut, 18. Mai 1924.

(Eingegangen 23. Mai 1924.)

Röntgenspektroskopische Untersuchungen über das Wesen der Quellung bei Substanzen, die ein Faserdiagramm geben.

Von J. R. Katz.

(Mit Tafel II und III.)

1. Ziel der Untersuchung.

Die von Kolloidchemikern und Biologen soviel diskutierte Frage[1]) nach dem Wesen der Quellung läßt sich durch Anwendung einer neuen Untersuchungsmethode ein Stück weiter beantworten als bisher. Die Frage nämlich, ob das Wasser zwischen Mizellen (kleinen Kristallen oder anderen Körperchen von 1 bis 100 $\mu\mu$ Größe) intermizellar, oder als feste Lösung intermolekular aufgenommen wird, kann durch Anwendung der Röntgenspektroskopie der direkten experimentellen Prüfung zugänglich gemacht werden (bei solchen quellbaren Körpern, die kristallinisch sind). Denn, wenn die Quellung intermizellar ist, so wird sich das Gitter nicht ändern, während bei der Bildung einer festen Lösung die Gitterdimensionen größer werden müssen[2]). Bekanntlich versteht man unter Quellung die Aufnahme einer Flüssigkeit in einen festen Körper, wobei derselbe homogen zu bleiben scheint, aber an Größe zunimmt („quillt"), während er an Kohäsion verliert (dehnbar wird, bei kleinerer Kraft zerreißt[3]). Fast alle Substanzen, die dem tierischen oder pflanzlichen Organismus entnommen sind, zeigen Quellbarkeit.

Besonders geeignet für solche röntgenspektroskopische Untersuchungen schienen mir die Faserstoffe zu sein, da nach bekannten vielfach bestätigten Versuchen v. Höhnels diese Körper nur in Breite und Dicke quellen und oft sogar stark, während dabei ihre Länge sich nicht oder kaum ändert. Eine Vergrößerung des Gitters wäre also nur in denjenigen Richtungen zu erwarten, die senkrecht zur Faserachse liegen. Da nun in den Substanzen mit Faserstruktur, wie Polanyi[4]) gezeigt hat, die Größe des Gitters in der Richtung senkrecht zur Faserachse sich in der Lage der Interferenzflecke, die am Äquator liegen, ausdrückt und diese Lage unabhängig ist von der Gittergröße in der Richtung parallel der Faserachse, so vereinfacht die Bestimmung sich bei Faserstoffen zu der Vermessung, ob die Lage der Interferenzen, die auf dem Äquator liegen, sich ändert. Geht die Quellung ins Gitter, so wird der Abstand je zwei solcher Streifen sich verkleinern. Findet keine Änderung dieser Abstände statt, so muß die Flüssigkeitsaufnahme intermizellar geschehen; diese letztere Schlußfolgerung ist aber nur dann zwingend, wenn die Substanz, welche das Röntgenspektrum gibt, auch diejenige ist, welche „quillt", während ein positives Ergebnis ohne weiteres beweisend ist, daß wenigstens ein Teil der Quellung intermolekular geschieht. Aber eben bei den Faserstoffen (speziell bei der Zellulose) ist mit großer Wahrscheinlichkeit anzunehmen — wie ich noch ausführlich diskutieren werde in einer späteren Abhandlung —, daß die Substanz, welche quillt, in der Hauptsache dieselbe ist als die, welche das Röntgenogramm gibt.

Später werden Untersuchungen folgen bei quellbaren Körpern mit anderer als Faserstruktur.

2. Beschreibung der Versuchstechnik.

Als Lichtquelle diente eine Hadding-Siegbahnsche Röntgenröhre[1]) mit Kupferantikathode, die mit einem intermittierenden Gleichstrom von 45 bis 50 Kilovolt und 15 bis 20 Milli-Amp. betrieben wurde. Dieser Strom wurde von einem Hochspannungstransformator mit rotierendem Gleichrichter geliefert. Die Beleuchtungen hatten — je nach der Dicke der Bündel und nach der Intensität der Schwärzungen auf der Platte — 8 bis 12 Stunden zu dauern.

Das durch die Aluminiumfenster (und die Papierpackung der Platte) durchgelassene Röntgenlicht war überwiegend monochromatisch; es bestand hauptsächlich aus der K_α-Strahlung des Kupfers, welche eine Wellenlänge von 1,54 Å.E. hat. Daneben zeigte sich schwächer (auf vielen Negativen kaum merklich) die K_β-Strahlung des Kupfers; eine gewisse Menge weißer (kontinuierlicher) Strahlung wird auch emittiert.

Da die Messung des Abstandes zwischen Platte und Faserbündel leicht erhebliche Fehlerquellen mit sich bringt, wurden die nasse und die trockene Substanz nacheinander in der gleichen Kamera aufgenommen, also bei genau derselben Distanz. Ein Faserbündel wurde zuerst naß aufgenommen, dann in der

1) Siehe über frühere Untersuchungen: J. R. Katz, Die Gesetze der Quellung. Kolloidchem. Beihefte **9**, S. 1—182, 1916.

2) Ausgenommen im Fall die Dichte der Substanz bei der Quellung zunehmen würde; dies kommt beim Quellen im Wasser (bei großen Quellungsgraden wie hier studiert) nicht vor; vgl. auch Vegards Untersuchung über die Entwässerung des Chabasits. Ann. d. Phys. **54**, 160—164, 1918, wo das Wasser zwar ins Gitter geht, aber es nicht vergrößert.

3) l. c. S. 9—14.

4) Naturwissenschaften. **9**, 339, 1920; siehe auch R. O. Herzog und W. Jancke, Ber. d. d. chem. Ges. 53, 343, 1920; R. O. Herzog, W. Jancke, M. Polanyi, Zeitschr. f. Physik **3**, 343, 1920.

1) Beschrieben von Assar Hadding, Zeitschr. f. Physik, **3**, 369, 1920.

Kamera bei 40° C über P_2O_5 getrocknet, ohne daß man es berührte, und endlich trocken noch einmal aufgenommen.

Die Kamera war ein kleiner aus geschwärztem Messingblech konstruierter Kasten, der hermetisch schloß. Die Blende bestand aus einem Metallzylinder von 60 mm Länge, Bohrung 1,5 mm Diameter. Die Vorderseite der Blende wurde verklebt mit dünnem Aluminiumblech oder mit schwarzem Papier, das mit einer Schicht Kollodium bedeckt war.

Die Hinterseite der Blende hatte eine genau zentrierte Rinne, in der das Faserbündel eingespannt werden konnte. Dasselbe wurde mit Klebwachs befestigt; es mußte genau vor der Mitte der Blende liegen.

Die Platte stand senkrecht zur Bohrung der Blende; sie maß 9×9 cm. Sie wurde in schwarzem Papier verpackt in die Kamera gestellt. Der Deckel der Kamera, hinten angebracht, hielt die Platte mittels Federn an ihrem Ort fixiert. Diese Federn preßten die Platte gegen eine Kante aus Messingblech, die mit einem dünnen Streifen Filz bekleidet war. Obwohl Filz ein quellbarer Körper ist, ebenso wie das Papier, in dem die Platte verpackt war, stand die Platte bei nassen und bei trockenen Aufnahmen praktisch gleich weit von dem Faserbündel entfernt; die Differenz konnte vernachlässigt werden. Das Einpacken in Papier bezweckte, die Gelatineschicht der Platte gegen eine zu starke Wasseraufnahme zu schützen, welche leicht die Platte etwas verschleiern machte.

Da diese Kamera hermetisch schloß, konnten die Substanzen bei konstantem Quellungsgrad untersucht werden; dazu standen unten in der Kamera Schälchen mit einer geeigneten Substanz, welche die Wasserdampfspannung konstant hielt (P_2O_5, nasses Filtrierpapier usw.).

Bei allen Aufnahmen wurde ein Schirm aus 2 mm dickem Bleiblech gebraucht, das die Kamera umgab und gegen falsches Röntgenlicht beschützte. Ohne diese Vorsorge treten allerlei störende Schatten und Verschleierungen auf. Der Messingdeckel hinter der Platte hätte — auf der Höhe, wo der Zentralfleck entsteht — ein kreisrundes Loch von 15 mm Diameter; es war mit schwarzem Papier zugeklebt und dieses dick mit Kollodium bestrichen.

Der Gang eines Versuches war etwa der Folgende. Erst wurde die gequollene Substanz (erhalten durch ein- bis zweitägiges Quellen in flüssigem Wasser) auf der Blende ausgespannt in einem Bündel sorgfältig parallelisierter Fasern. In die Kamera wurde dann eine Menge stark genäßten Filtrierpapiers gebracht (das mit dem Faserbündel in direktem Kontakt stand, so daß derselbe auch durch kapillare Wirkung feucht blieb). Die Platte mit Papierumhüllung hatte einige Stunden vorher in der Kamera gestanden, so daß sie aus dem nassen Filtrierpapier eine reichliche Menge Wasser aufgenommen hatte und nicht trocknend wirken konnte. Bei Anfang des Versuches wurden Deckel und Kamera durch ein hermetisch abschließendes Leukoplastband miteinander verbunden.

Dann fand die Aufnahme statt. Lange Belichtungszeiten waren notwendig, weil immer nur dünne Faserbündel benutzt wurden ($^1/_2$ bis $^3/_4$ mm), eine Beschränkung, die notwendig war, damit die Interferenzstreifen möglichst schmal ausfielen und sich gut vermessen ließen. Großes Gewicht wurde darauf gelegt, daß die Aufnahme der nassen Substanzen an einem Tage ununterbrochen stattfand. Sonst wäre zu befürchten gewesen, daß (wegen des sog. v. Schroeder-Effekts[1]) der Quellungsgrad der untersuchten Substanz sich bedeutend verkleinern konnte, so daß sie nicht mit der gemessenen Größe übereinstimmen würde.

Bei der Aufnahme mußte ganz besonders auf gute Zentrierung acht gegeben werden. War die Achse der Blende auf einen Punkt nur etwas außerhalb der Mitte des auf der Antikathode liegenden Brennflecks gerichtet, so war die Aufnahme leicht um $^2/_3$ unterexponiert.

Sobald dieser erste Versuch beendet war, wurde das genäßte Filtrierpapier aus der Kamera entfernt und dieselbe durch kurzes Stehen an der Luft getrocknet. Dann wurden einige Schälchen mit Phosphorpentoxyd in die Kamera gestellt, eine Platte in eine gleich dicke Papierumhüllung eingelegt, und das Ganze — nach Verschluß des Deckels mit dem Leukoplastband — in einen Brutschrank von 40° C gestellt. Am nächsten Tage wurde das P_2O_5 erneuert; am darauf folgenden Tage wurde die Aufnahme gemacht. Es war wesentlich, daß erst die nasse und dann die trockene Aufnahme gemacht wurde; denn es ist vorteilhaft eine möglichst starke Quellung zu untersuchen. Und eine einmal scharf getrocknete quellbare Substanz nimmt nachher nie mehr soviel Wasser auf als vorher.

Es wurde erstrebt, beide Aufnahmen gleich stark zu belichten, da die Lage der Mitte des Interferenzstreifens — wegen der Absorption im Faserbündel — um einige Zehntel mm abhängen kann von der Länge der Beleuchtung (wie ich durch besondere Versuche nochmals feststellte). Leider ist eine genau gleiche Beleuchtung schwer

1) v. Schroeder fand bekanntlich, daß ein in Wasser gequollener Körper in scheinbar gesättigtem Dampf viel Wasser verliert (bis $^9/_{10}$). Zeitschr. f. phys. Chemie 45, 109, 1903; H. Freundlich, Kapillarchemie, II. Aufl. S. 925.

zu erreichen, wohl aber eine annähernde; aber das genügte.

Bei dem Ausmessen des Negativs wurde die Mitte der Streifen bestimmt und der Abstand der Mitten von je zwei symmetrischen Äquatorialstreifen gemessen. Jede angegebene Zahl ist ein Mittelwert aus mehreren Einzelbestimmungen. Die angegebenen Zahlen sind sicher auf einige Zehntel mm genau. Das Ausmessen geschah mit einem durchsichtigen, in mm geteilten, gläsernen Maßstab, auf einer von hinten beleuchteten Milchglasscheibe als Hintergrund. In einer späteren zusammenfassenden Publikation hoffe ich auch Messungen dieser Negative mit dem Photometer geben zu können, wodurch eine größere Genauigkeit zu erreichen wäre.

Den Abstand zwischen Faserbündel und Platte zu kennen, ist für meine Zwecke eigentlich nicht nötig. Doch wurde dieser Abstand doch bestimmt, freilich nur mit einer Genauigkeit von ± 0,8 mm. Die Messung geschah mit einem dünnen Metalldraht; es wurde bestimmt, wie lang das Drahtstück war, das vom vorderen Ende der Blende bis zur Platte, bzw. bis zum hinteren Ende der Blende reichte: die Differenz zwischen beiden Werten war der gesuchte Abstand. Dieser betrug gewöhnlich 45 bis 60 mm.

Die hier von mir angegebene Versuchstechnik — Ankleben des sorgfältig parallelisierten Faserbündels in einer Rinne auf der Rückseite der Blende — macht es zu einer leichten Sache, gute Röntgenaufnahmen von Faserstoffen zu erhalten; die experimentellen Schwierigkeiten liegen dann eigentlich nur in dem Vakuumdichthalten der Röntgenröhre.

3. Die Quellung von Zellulose und Hydratzellulose in Wasser.

Bei den hier unten folgenden Substanzen wurde der Abstand der verschiedenen symmetrisch gelegenen Äquatorialstreifen in mm vermessen. Der Wert des am meisten geschwärzten Streifens ist dick gedruckt[1]); er entspricht der Fläche (020) der Zellulose nach Polanyi[2]). Alle Wassergehalte sind angegeben als Gewichtsteile Wasser in 100 T. trockener Substanz (getrocknet bei 80° C über Schwefelsäure in vacuo). Sie wurden erhalten durch Bestimmung der Wasseraufnahme der lufttrockenen Substanz über 5 Proz. Schwefelsäure. Bekanntlich ist es sehr schwierig den Wassergehalt im Quellungsmaximum zu bestimmen; man bekommt aber so eine ziemlich gute Schätzung.

1) Weil er sich besonders genau bestimmen ließ, wegen der Schärfe dieser Streifen.

2) Vgl. Polanyi, Faserstoffe im Röntgenlichte. Naturwissenschaften **9**, 339, Fig. 4.

a) Ramie[1]) (nicht merzerisiert); normales Zellulosediagramm.

naß	trocken	Abstand
30,1	30,3	—
40,5	40,6	—
45,5	**45,3**	—

Die nasse Substanz enthielt etwa 14 Proz. Wasser. Da die Quellung nur senkrecht zur Faserachse geschieht, hätten bei intermolekularer Quellung die Streifen weniger weit auseinander liegen sollen und zwar um die Hälfte von 14 Proz. Die Streifen verschieben sich nicht bei der Quellung; die Quellung beruht also nicht nachweisbar auf Gittervergrößerung; 7 Proz. Änderung des Gitters wäre mit größter Sicherheit nachzuweisen gewesen.

b) Ramie, schwach merzerisiert (1 Minute unter Spannung in 17 proz. Natronlauge); die Substanz zeigt das typische Diagramm der merzerisierten Zellulose (also Verdoppelung der intensivsten Streifen am Äquator; zweiter Streifen (200) gleich intensiv als der erste (020)).

naß	trocken	Abstand
26,6	26,9	—
36,6	**35,9**	—
40,9	**41,0**	—

Die Streifen waren etwas verwaschen, deshalb weniger genau auszumessen. Auch hier liegt kein Hinweis vor, daß das Wasser ins Gitter geht. Der Wassergehalt der nassen Substanz betrug etwa 18 Proz. Wäre das ganze Wasser ins Gitter gegangen, so hätte sich dieses um 9 Proz. ändern müssen.

c) Manilla-Hanf, hellgelb, fast weiß. Diese Substanz wurde untersucht, weil sie nach Wiesner besonders viel Wasser binden soll; er gibt 50 Proz. an, was aber bei der von mir untersuchten Substanz gar nicht stimmte. Normales Zellulosediagramm.

naß	trocken	Abstand
36,2	35,6	60,5
51,4	**51,4**	—

Der Wassergehalt betrug etwa 18 Proz. Dennoch keine nachweisbare Änderung des Gitters, obwohl man 9 Proz. Änderung erwarten durfte im Falle einer intermolekularen Quellung.

d Kunstseide aus Viskose (Vistra der Köln-Rottweil A.-G.) zeigt einen starken Richtungseffekt schönster Art[2]) (während viele andere Kunstseiden Debye-Scherrer-Diagramme zeigen

1) Ramie ist für solche Versuche am meisten geeignete Zellulosеart, da diese Fasern nicht wie so viele eine spiralförmige Ordnung der Kristallite zeigen, sondern eine parallele Orientierung.

2) Daß diese und die folgende Kunstseide ein solches Diagramm geben, wurde mir von Prof. R. O. Herzog mitgeteilt.

oder Übergänge), d. h. in dieser Faser liegen die Kristalle weitgehend parallel orientiert. Die Substanz ist eine sogenannte Hydratzellulose. Sie zeigt dasselbe Diagramm wie die in Natronlauge merzerisierte Zellulose. Daß diese Kunstseide ein Faserstoffdiagramm aufweist, zeigt, daß es der Industrie gelungen ist, Kunstseide herzustellen, bei der die Kristallite wie in der natürlichen Faser parallel orientiert liegen.

naß	trocken	Abstand
—	23,4	53,7
38,2	**38,7**	
42,4	**42,6**	

Der Quellungsgrad der nassen Substanz betrug etwa 15 Proz. Eine Änderung des Gitters um etwa 1 Proz. ist angedeutet, aber nicht sicher nachgewiesen, während die Quellung in der Querrichtung wenigstens $7^1/_2$ Proz. beträgt[1]).

e) Kunstseide aus Kupferoxydammoniak (sogen. Adler-Seide der Firma J. P. Bemberg in Barmen-Rittershausen; 120 deniers) zeigt ein schönes Punktdiagramm. Die Substanz ist eine Hydratzellulose, zeigt dasselbe Diagramm wie die in Natronlauge merzerisierte Zellulose[2]).

naß	trocken (drei Negative)			Abstand
22,9	23,2	22,9	23,4	53,0
39,6	**39,4**	**39,5**	**39,6**	
44,0	**43,8**	**44,0**	**44,0**	

Der Wassergehalt der nassen Substanz beträgt etwa 23 Proz. Doch ändert das Gitter sich nicht. Die nasse Substanz zeigte einen Ring, wie amorphe Substanzen sie zeigen. Der Diameter dieses Rings betrug 57,1 mm. Im Diagramm der trockenen Substanz fehlte dieser Ring. Ich komme auf die mögliche Bedeutung desselben zurück. Fig. 1 und 2 zeigen die Diagramme dieser Substanz in genau der natürlichen Größe, so daß der Leser sie nachmessen kann.

f) Ramie, extrem stark merzerisiert in Zinkchloridlösung (20 Minuten lang ohne Spannung der Faser bei 100° C in einer bei Zimmertemperatur gesättigten Zinkchloridlösung, dann in dieser Lösung 10 Minuten gekocht, dann mit kalter verdünnter Salzsäure ausgewaschen; bei noch etwas längerem Kochen ging die Zellulose in Lösung). Die Substanz quoll ungemein stark auf bei der Behandlung in Zinkchlorid. Die Substanz zeigt das normale Zellulosediagramm. Verschmierung der Streifen zu Kreisen trat nicht auf (durch Aufhebung der Parallelorientierung der Kristalle), während bei Merzerisierung ohne Spannung in starker Natronlauge, z. B. 27 Proz. bei Zimmertemperatur, die ich zum Vergleich ausführte, ziemlich komplette Verschmierung der Streifen zu Kreisen auftrat[1]). Ich fand:

naß	trocken	Abstand
39,8	**40,1**	47,5 mm

Der Wassergehalt der nassen Substanz betrug etwa 18 Proz. Dem hätte eine Änderung des Gitters von 9 Proz. entsprochen. Aber es änderte sich nichts.

Bei allen untersuchten Zellulosen und Hydratzellulosen waren die Diagramme für naß und trocken gleich scharf; von Röntgenasterismus bei Wässerung oder Entwässerung ist nichts zu konstatieren.

Zusammenfassend können wir sagen, daß der Unterschied in den Röntgenogrammen zwischen gequollen und trocken nicht nachgewiesen werden konnte, obwohl im Falle einer ausschließlich intermolekularen Quellung Verschiebungen der Interferenzstreifen hätten auftreten müssen, die die Fehlergrenze der Methode um das Vielfache hätten übersteigen müssen. Falls etwas Wasser das Gitter vergrößert (etwa bei stark merzerisierten Zellulosen), ist es nur ein kleiner Teil der total aufgenommenen Menge.

Falls also die Substanz, die das Spektrum gibt, auch die hauptsächliche ist, die quillt, muß die Quellung bei allen untersuchten Zellulosen und Hydratzellulosen wohl intermizellar sein, da sonst das Größerwerden des festen Körpers nicht erklärt wird. Daß dies der Fall ist, wird auch bestätigt durch die Aufhebung der Parallelorientierung der Kristallite in 27 Proz. Natronlauge (das Faserdiagramm geht teilweise in ein Debye-Scherrer-Diagramm über), denn wenn die Quellung sehr stark wird und intermizellar ist, muß bei einer bestimmten Größe des Quellungsgrades der Zusammenhalt der Kristallite sich lockern. Das wäre dann wohl nicht anders möglich (Fig. 5 und 6[2]).

4. Die Quellung des Seidenfibroins in Wasser.

Das Diagramm des Seidenfibroins ist von R. Brill[3]) gründlich untersucht worden. Es hat sich gezeigt, daß die Diagramme der echten

1) Über die Frage, ob bei merzerisierten und Hydrat-Zellulosen doch etwas Wasser ins Gitter geht — wofür Hinweise vorliegen — werden die Versuche weiter geführt.

2) Ramie in Kupferoxydammoniak gequollen und dann mit Säure ausgewaschen, zeigt auch das Diagramm der merzerisierten Zellulose.

1) Über diese Versuche werde ich nächstens zusammen mit Dr. H. Mark ausführlich berichten.

2) Die Figuren zeigen zu gleicher Zeit den Übergang eines Diagramms der natürlichen Zellulose in ein Diagramm der merzerisierten Zellulose.

3) Diss. Berlin 1923; Ann. d. Chem. **434**, 204, 1923.

Einfluß der Quellung auf das Röntgenspektrogramm.

Hydratzellulose in Faserform (Abstand 53 mm).

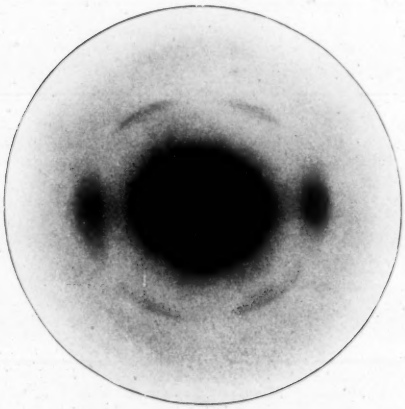


Fig. 1. Im Quellungsmaximum.

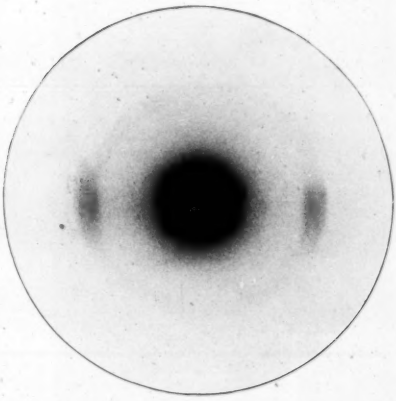


Fig. 2. Trocken.

Seidenfibroin (Silkworin) (Abstand 61 mm).

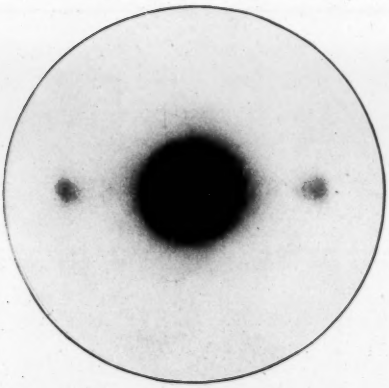


Fig. 3. Im Quellungsmaximum.

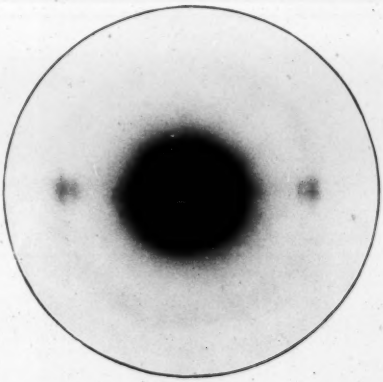


Fig. 4. Trocken.

Alles genau auf natürlicher Größe reproduziert.

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY

und wilden Seiden nur unbedeutende Differenzen zeigen, so daß der kristallisierte Körper wahrscheinlich in allen diesen Substanzen identisch ist. Freilich sind die Ursachen der kleinen Differenzen noch nicht erklärt[1]).

a) Entbastete Seide von Bombyx mori (echte Seide); ein hellbraunes Präparat, erhalten durch Auskochen von Naturseide mit fünfprozentiger neutraler Seifenlösung.

naß	trocken	Abstand
31,2	31,2	(vermutlich) 52,1
39,2	**39,1**	

Der Wassergehalt der nassen Substanz betrug etwa 15 Proz. Die Änderung der äquatorialen Streifen müßte daher wenigstens $7^1/_2$ Proz. betragen. Sie ist aber gar nicht nachweisbar.

b) Silkworm. Die Substanz wird bekanntlich erhalten, indem der Inhalt der Spinndrüse des Seidenspinners in verdünnte Essigsäure ausgepreßt wird. Die Substanz enthält daher neben Fibroin auch noch Sericin, so daß hier sicher die ganze quellende Substanz nicht zur Bildung des Spektrums beiträgt. Der Körper war ein durchsichtiger, homogen scheinender Draht von etwa 0,5 mm Dicke.

naß	trocken	Abstand
42,1	41,9	61,0
46,9	**47,0**	

Hier ist der Quellungsgrad der nassen Substanz viel besser als sonst zu bestimmen, da man den aus Wasser genommenen, ziemlich dicken Draht abtrocknen und dann wiegen kann (ohne daß wie bei Faserstoffen kapillares Wasser zwischen den Einzelfäden gebunden bleibt). Dieser Quellungsgrad betrug 23 Proz. Aber eben bei dieser Substanz kann man daraus weniger als sonst folgern durch die gleichzeitige Anwesenheit des Sericins. Eine meßbare Änderung des Gitters tritt nicht auf (Fig. 3 und 4).

c) Fibroin, bezogen von E. Merck, Darmstadt. Das Präparat bestand aus rein weißen, glänzenden, gewundenen Drähtchen. Dieselben wurden vor der Aufnahme entzwirnt und in einem Bündel parallel gerichteter Fasern aufgenommen. Das Diagramm zeigt zwei Äquatorialstreifen, die feuchte Substanz einen amorphen Ring (Diameter 53,5 mm). Die Substanz gibt ein sehr schwaches und verwaschenes Spektrum und zeigt viel höhere Quellbarkeit als alle anderen mir bis jetzt bekannten Fibroinpräparate.

naß	trocken	Abstand
41,0	**40,9**	53,0

1) Nach mündlicher Mitteilung von M. Polanyi.

Die nasse Substanz enthielt wenigstens 26 Proz. Wasser (Gehalt über eine Schwefelsäurelösung mit Wasserdampfspannung $96^1/_2$ Proz. derjenigen des reinen Wassers). Sie mußte daher eine Änderung der Äquatorialstreifen um 13 Proz. ($^1/_2$) bis 9 Proz. ($^1/_3$) zeigen, weist aber gar keine sichtbare Änderung auf.

Zusammenfassend können wir sagen, daß beim Seidenfibroin gar keine Änderung des Gitters der kristallinischen Substanz auftritt. Wenn also die Substanz, die das Spektrum gibt, die hauptsächlich quellende ist (was hier schon weniger sicher ist als bei Zellulose), so ist auch die Quellung des Seidenfibroins wohl intermizellar.

Das Spektrum der feuchten und trockenen Fibroine ist gleich scharf; kein Röntgenasterismus bei der Aufnahme oder bei dem Verlust von Wasser.

5. Ändert sich etwas im Gitter in der Faserrichtung?

Wo v. Höhnel u. a. gezeigt haben, daß die Länge der Faser sich beim Quellen nicht merklich ändert (höchstens um $^1/_{10}$ Proz.), da ist es recht unwahrscheinlich, daß eine Änderung im Gitter in der Faserrichtung auftritt. So etwas könnte nur vorkommen bei kompliziert gebauten organisierten Gebilden. Dort könnte z. B. eine starre oberflächliche Schicht mit ringförmig orientierten Fasern die Quellung des Kernes in der Dicke hemmen; wenn dieser Kern aus Elementen besteht, die in der Dicke quellen, könnten Spannungen auftreten, welche das Gitter der Faserrichtung entlang deformieren.

Wir haben keinen Grund zu glauben, daß solche Komplikationen vorliegen bei den in dieser Untersuchung studierten Fasern aus Zellulose und Seidenfibroin, bei dem die Kristallite einfach parallel liegen. Ob die Längsachse quillt, ließe sich am sichersten aus schiefen Aufnahmen entnehmen (wobei Faserbündel und eventuell Platte bestimmte Winkel bilden mit dem Primärstrahl[1]). Ich habe die Frage bis jetzt nicht für wichtig genug gehalten, solche schiefe Aufnahmen naß und trocken in der gleichen Kamera zu machen. Denn genug läßt sich schon aus dem vertikalen Abstand der Interferenzen höherer Ordnung schließen. Ändert sich dieser Abstand nicht (der vertikale, also derjenige senkrecht zur Äquatoriallinie), so kann sich bei unseren Substanzen die Gitterkonstante in der Faserrichtung gleichfalls nicht ändern[2]).

1) Siehe Polanyi u. Weißenberg, Zeitschr. f. Phys. **9**, 123—130, 1922.

2) Siehe Polanyi, Faserstoffe im Röntgenlicht, Naturwissenschaften **9**, 339, 1920.

Gefunden wurde für den vertikalen Abstand der innersten Interferenzen (101) auf den Hyperbeln erster Ordnung (linke und rechte Interferenz einzeln aufgegeben) in den oben erwähnten Negativen:

Zellulose.
Adler-Kunstseide

	trocken	naß	Abstand
r.	35,0	35,0	53,0
l.	35,0	35,0	

Fibroine.
Silkworm

	trocken	naß	Abstand
r.	29,5	29,9	61,0
l.	29,7	29,8	

Ramie.

	trocken	naß	nach Vorquellung in heißem Zinkchlorid und Auswaschen desselben naß untersucht	Abstand
r.	30,0	30,5	30,0	47,5
l.	30,5	30,0	30,0	

Es liegen daher in meinen Röntgennegativen keine Andeutungen vor, daß das Gitter in der Faserrichtung irgendwelche Änderungen erfährt bei der Quellung.

6. Zusammenfassung.

Wenn die kristallinische Substanz, die das Röntgenspektrum gibt, die hauptsächlichste Substanz ist, die quillt — und das ist recht wahrscheinlich — dann ist bei Zellulosen, Hydratzellulosen und Seidenfibroinen die Quellung in Wasser wohl intermizellar. Bei der Quellung und Entquellung bleibt das Röntgenspektum gleich scharf.

Dieses Ergebnis berechtigt nicht zu der Annahme, daß die Quellung immer intermizellar sei. Wir werden bei der Beschreibung der Versuche mit Substanzen, die ein Debye-Scherrer-Diagramm geben, bald sehen, daß es auch Körper gibt, bei denen das Quellungswasser zum großen Teil ins Gitter geht unter Vergrößerung desselben. Es ist daher von Fall zu Fall zu untersuchen, welcher Natur die Quellung ist.

Diese Schlußfolgerungen sind nur richtig unter einer bestimmten Annahme, die ich zum Schluß noch besonders erwähnen will, nämlich daß die röntgenspektrographischen Identitätsperioden nicht kleiner als die Dimensionen eines Einzelmoleküls sind. Aus dieser Annahme wurde bekanntlich von M. Polanyi für Zellulose und von R. Brill für Fibroin auf ein niedriges Molekulargewicht dieser Substanzen geschlossen[1]). Wenn es sich aber herausstellen würde, daß die Dimensionen des Moleküls bei diesen Stoffen das zwei- oder dreifache der Identitätsperioden wären[1]), würde nicht nur deren Molekulargewicht doch hoch sein (das 8- bzw. 27-fache), sondern aus dem Unverändertbleiben dieser Identitätsperioden bei der Quellung ließe sich dann auch nicht mehr mit Sicherheit auf eine intermizellare Quellung schließen. Dieser Punkt muß weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

1) M. Polanyi, Naturwissenschaften **9**, 228, 1920; R. Brill, loc. cit.

Der Plan, das Quellungsproblem, das ich früher[2]) mit anderen Methoden ausführlich studiert hatte, jetzt auch röntgenspektrographisch zu bearbeiten, entstand Anfang 1923. Die vorliegende erste Untersuchung wurde ausgeführt in dem Kaiser-Wilhelm Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie und, zum größeren Teil, in dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Faserstoffchemie in Berlin-Dahlem im Sommer 1923. Die dort gesammelten Erfahrungen über Röntgenspektroskopie von Kolloiden und Faserstoffen wurden mir bei der Ausarbeitung des Grundgedankens bereitwilligst zur Verfügung gestellt. Den Direktoren Geheimrat F. Haber und Prof. R. O. Herzog bin ich dankbar für die verliehene Gastfreiheit, und Prof. H. Freundlich für sein warmes Interesse an dem Fortschritt dieser Arbeit. Den Herren Dr. J. Böhm und Dr. H. Mark bin ich zu Dank verpflichtet für die tatkräftige Hilfe bei der Ausführung der Versuche.

1) Bekanntlich wird bei anorganischen Substanzen vielfach diese Annahme gemacht.

2) J. R. Katz, Verslagen der Kon. Akad. van Wetensch., Nov. u. Dez. 1910; Zeitschr. f. Elektrochemie **17**, (Vortrag auf der Jahresversammlung d. deutschen Bunsen-Gesellschaft für angewandte physikalische Chemie, Kiel, Mai 1911); Nernst-Festschrift 1912; Kolloidchem. Beihefte **9**, 1—182, 1916.

Amsterdam, Mai 1924.

(Eingegangen 15. Mai 1924.)

Ein Manometer hoher Empfindlichkeit.

Von Leonhard Heis.

Das Instrument ist ein verkleinertes Edelmannsches Manometer[1]) mit 2 Düsen, welche die beiden Enden eines kleinen Flügels aus Aluminium (s. Fig. 1) anblasen, bzw. ansaugen. Der Flügel besteht aus einem 0,2 mm dicken Aluminiumdraht mit scheibenartig verbreiterten Enden. Er ist 10 mm lang und wiegt ca. 1 mg. Er ist rechtwinklig an der Achse aus 0,3 mm dickem Aluminiumdraht von 15 mm Länge befestigt. Die Achse trägt den kleinen Spiegel (ca. 2×3,5 mm) von ca. 1 mg. Gewicht. Dieses

1) Katalog der Firma F. Edelmann.

System[1]) ist drehbar mit Haken (s. Fig. 2) an an einem Wollastonfaden von 2 μ Dicke und ca. 5 cm Länge aufgehängt. Der Faden ist mit seinem oberen nicht abgeätzten Ende an dem Halter aus 2 mm dickem Messingdraht festgeklemmt. Der Halter steckt leicht drehbar in einem längs aufgeschlitzten Messingrohr und wird durch einen Messingring mit Klemmschraube in der richtigen Höhe gehalten. Das Messingrohr ist an dem Träger aus ca. 1,5 mm starkem Kupferdraht festgelötet. Der Träger steckt in einer Messinghülse, die in den Bleisockel eingeschraubt ist. Diese Anordnung erleichtert das Auswechseln der empfindlichsten Teile des Instrumentes und die Justierung. Der Bleisockel ruht auf einem Gummiring auf dem Boden des Glasgefäßes, welches das Instrument luftdicht umgibt und durch einen Schliff in 2 Teile getrennt ist. In dem oberen abnehmbaren Teile befindet sich das Fenster, eine aufgekittete planparallele Glasplatte. In dem unteren Teil sind in der Nähe des Bodens die 2 Glas-

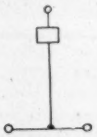


Fig. 1.

rohre von ca. 3,5 mm lichter Weite eingeblasen, in welche die beiden Düsen, Messingrohre von ca. 2 mm lichter Weite, eingekittet sind. Diese beiden Düsen sind an eine Messingplatte angelötet, auf welche das kleine Aluminiumgehäuse, welches den Flügel umgibt, aufgekittet und aufgeschraubt ist, so daß die Düsen mit den in die Aluminiumwand des Gehäuses gebohrten 0,5 mm weiten Öffnungen in einem Abstande von 9 mm in das Gehäuse münden und aus ca. 1 mm Entfernung auf den Flügel wirken. Das oben offene Aluminiumgehäuse schützt den Flügel vor konvektiven Strömungen im Inneren des Glasgefäßes und soll die Wärmestrahlung von außen abschirmen. Um Störungen der Ruhelage des Flügels durch elektrostatische Kräfte zu vermeiden, wurde das drehende System aus Metall verfertigt. Das Aluminiumgehäuse wurde aus dem gleichen Grunde mit dem Kupferträger durch einen dünnen Draht in leitende Verbindung gebracht. Da der Aluminiumflügel im magnetischen Felde eine kleine Drehung erfährt, wurde das ganze Instrument nach Art der Galvanometer gepanzert. Diese Panzerung und ein Wassertrog aus planparallelen Glasplatten vor dem Fenster schützen das Instrument

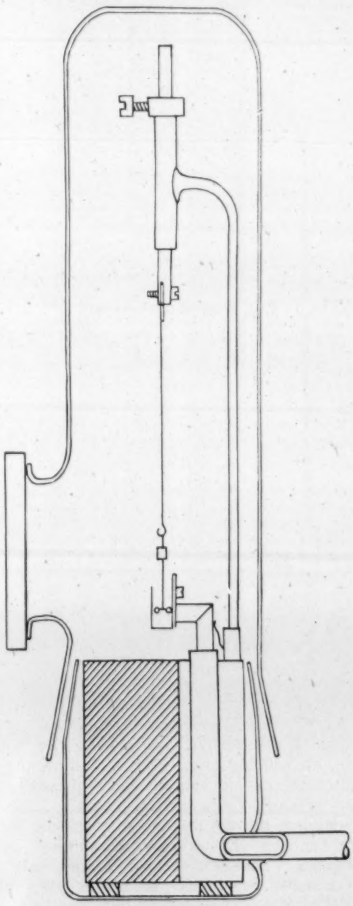


Fig. 2.

vor ungleicher Erwärmung. Die Ablesung erfolgt mit einem Fernrohr an der stark beleuchteten Milchglasskala in einem Abstande von ca. 2—3 m.

Die große Empfindlichkeit zeigt sich bei dem Versuche die Magnetostriktion eines Gases

1) Meine Erfahrung in der Anfertigung solch leichter Systeme verdanke ich der Herstellung eines hochempfindlichen Quadrantenelektrometers (unveröffentlicht), welches ich 1912 in Tübingen bei Prof. Paschen herstellte.

nachzuweisen[1]). Es wird damit gleichzeitig eine neue Methode entwickelt die Suszeptibilität eines Gases zu messen.

Die beiden Rohrstutzen des Manometers wurden (s. Fig. 3) je mit einem Glaskolben

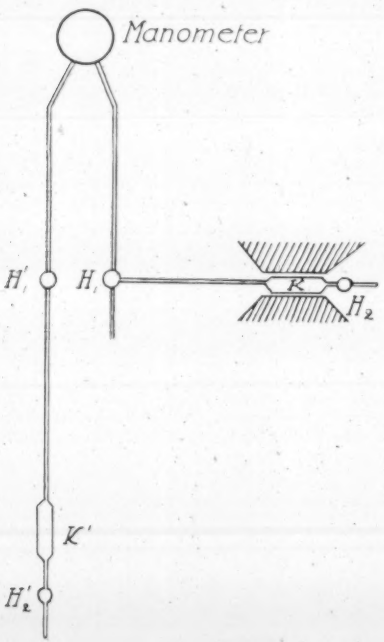


Fig. 3.

durch Glaskapillaren von ca. 2 mm bzw. 3,5 mm lichter Weite und ca. 70 cm Länge verbunden. Die kreiszylindrischen Kolben von ca. 25 mm Durchmesser sind von annähernd gleicher Form und gleichem Volumen, (ca. 30 cm³). Dies war notwendig, um die Störungen durch die ständig vorhandenen Luftdruckschwankungen auszuschalten. Sind die beiden Kolben mit dem Manometer verbunden, so blasen oder saugen die Düsen gleichzeitig, so daß im Falle vollständiger Symmetrie keine Drehung des Flügels erfolgt. Das System zeigt dann nur noch manchmal eine langsame Wanderung des Ruhepunktes, die von Temperaturungleichheiten in der Apparatur herrührt. Die beiden Kolben können vermittelst der Hähne H_1 und H_1' gegen das Manometer, vermittelst der Hähne H_2 und H_2' gegen die atmosphärische Luft abgeschlossen werden. Der Hahn H_1 ist ein Dreiwegehahn und gestattet bei abgesperrtem Manometer den Kolben K mit einem beliebigen Gase zu füllen. Die Vermischung des Gases mit der Luft im Manometer wird erst nach längerer Zeit bemerkbar. Um Störungen durch Temperaturänderung zu vermeiden, wurden die Kolben und die Zuführungsrohre in Watte eingepackt. Der Kolben K wurde zwischen die Pole eines Weißschen Elektromagneten gebracht. Einschalten bzw. Ausschalten des Feldes hat nahezu gleiche maximale Ausschläge zur Folge. Ist χ die Suszeptibilität des Gases, so erfährt der Druck im Kolben zwischen den Polen bei einer Feldstärke H einen Zuwachs von $\chi \frac{H^2}{2}$. Sperrt man die Kolben durch die Hähne H_1 und H_1' ab, so erfolgt durch den Elektromagneten ebenfalls ein kleiner Ausschlag, der zum größten Teil von dem Aluminiumflügel herrührt und durch ein mit dem Elektromagneten im Nebenschluß befindliches Solenoid von außen kompensiert werden konnte. Die maximalen Ausschläge erfolgen nach Art von ballistischen Ausschlägen ungefähr 3 Sekunden nach Einschalten des Feldes. Es ergaben sich beispielsweise für eine bestimmte Empfindlichkeit und für ein mittleres Magnetfeld im Kolben von $H = 20000$ Gauß folgende maximale Ausschläge: für H_2 = — 0,07 mm, für Luft 2,61 mm und für O_2 11,25 mm. Der Wasserstoff und der Sauerstoff waren Stahlflaschen entnommen. Diese Ausschläge sind ungefähr proportional den bekannten Suszeptibilitäten dieser Gase.

Die Größenordnung der statischen Empfindlichkeit des Instrumentes konnte ermittelt werden, indem man es im Nebenschluß an ein Glasrohr von 12,5 mm lichter Weite und 20 cm Länge in einem Abstande von 10 cm anschloß, das mit einem Ende an eine Kapillare von 0,68 mm lichter Weite und 47,5 cm Länge angeblasen war. Hält man den Druckunterschied konstant, so stellt sich infolge der stationären Strömung im Manometer ein konstanter Ausschlag ein. Eine Druckdifferenz zwischen den freien Enden von 1 mm Hg entsprach dann infolge der Poisseuille-Strömung einem Druckunterschied am Manometer von ca. $0{,}9 \cdot 10^{-6}$ mm. Es ergab sich für die statische Empfindlichkeit $2{,}7 \cdot 10^{-8}$ mm Hg Druckdifferenz für einen Ausschlag von 1 mm bei 2 m Skalenabstand. Mit dieser Anordnung konnte auch die aperiodische Einstellung des Flügels in seine Ruhelage beobachtet werden. Die Empfindlichkeit für zeitlich veränderliche Druckunterschiede wurde dadurch gemessen, daß

1) W. Voigt, Theoretische Physik, § 21.

die Kohrenden nur mit dem Quecksilbermanometer, das dort den Druckunterschied mißt, in Verbindung waren. Es waren dann die maximalen Ausschläge proportional den angelegten Anfangsdrucken. Der Druckausgleich erfolgte auch in diesem Falle aperiodisch.

Unter der Annahme, daß bei den betrachteten Vorgängen die Strömungen der Apparatur überall laminar verlaufen, ergibt sich eine einfache Theorie für die Wirkungsweise des Instrumentes. Man kann in guter Näherung die Strömungsvorgänge als quasistationäre auffassen und die Trägheitskräfte vernachlässigen. Ist φ der Drehungswinkel des Flügels aus der Ruhelage, so ist die aperiodische Einstellung in die Ruhelage gegeben durch den Exponentialfaktor $\lambda = \frac{D}{R}$. D bedeutet die Direktionskraft und R den Reibungsfaktor, der proportional dem Reibungskoeffizienten des Gases anzusetzen ist, in dem der Flügel sich bewegt. Aus den Beobachtungen ergab sich $\lambda = 0{,}114$.

Fließen U Kubikzentimeter pro Sekunde durch das Manometer, so entspricht dies einer ungefähren Winkelgeschwindigkeit der Strömung an den Flügelenden von $\frac{2U}{qa}$, wenn $a = 0{,}9$ cm der Düsenabstand und q einen aus der Kontinuitätsbedingung folgenden Querschnitt der Strömung bedeutet. Im Abstand 1 mm von den Düsen würde dies bei laminarer Strömung der Größenordnung nach einer Halbkugeloberfläche von $q = 0{,}063$ cm² entsprechen. Unter dieser Annahme ist auch der für die Strömung in Betracht kommende Widerstand W nur den Kapillaren zuzuschreiben. Er wurde abgeschätzt zu $W = 200$ absolute Einheiten.

Entsprechend einem Druckunterschied p für den Kolben ist dann im Manometer $U = \frac{p}{W}$ und der Flügel im Gleichgewicht bei dem Ausschlag $a = \frac{2p}{qa\lambda W}$. Aus der Theorie folgt für den adiabatischen Druckausgleich W der Kolben ein exponentielles Abklingungsgesetz mit dem Exponentialfaktor $\varkappa = \frac{C_p}{C_v} \frac{P}{WV}$. Es bedeutet P den Druck des Gases und V das Kolbenvolumen. Daraus ergibt sich theoretisch für $\varkappa = 233$. In der Tat gleicht sich bei Öffnen des Hahnes H_1 ein vorhandener, endlicher Druckunterschied der Kolben ruckartig aus. Ist jedoch die Druckdifferenz in den Kolben, wie im Falle der Eichung vorgeschrieben, z. B. durch $p = p_0 e^{-\varkappa t}$, so ergibt die Theorie für die Bewegung des Flügels das Gesetz

$$\varphi = \frac{p_0}{qaW(\eta - \lambda)} (e^{-\lambda t} - e^{-\eta t})$$

für den maximalen Ausschlag folgt daraus

$$\beta = \frac{p_0}{qaW\eta} \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^{\frac{\lambda}{\eta - \lambda}}$$

und die Zeit τ_η der Einstellung nach Beginn des Ausgleichs des Anfangsdruckes

$$\tau_\eta = \frac{1}{\eta - \lambda} \ln \frac{\eta}{\lambda}.$$

Im Falle der Magnetisierung ist der die Strömung bewirkende Druckunterschied $p - \sigma$, wenn $\sigma = \chi \frac{H^2}{2}$ und p den barometrischen Druckunterschied in den Kolben bedeutet. Beschreibt man die zeitliche Einstellung des Magnetfeldes in erster Näherung durch eine exponentielle Funktion mit dem Exponentialfaktor μ, so ist der für die Strömung wirksame Druckunterschied zeitlich gegeben durch die Formel

$$p - \sigma = \frac{\sigma_0 \mu}{\varkappa - \mu} (e^{-\mu t} - e^{-\varkappa t})$$

wenn σ_0 dem Anfangs- bzw. Endzustand der Magnetostriktion[1]) entspricht.

Für den maximalen Ausschlag in diesem Falle ergibt die Theorie, da wie festgestellt $\varkappa >> \mu$:

$$\gamma = \frac{\sigma_0}{qaW(\varkappa - \mu)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{\lambda}{\mu - \lambda}}$$

in der Einstellungszeit:

$$\tau_\mu = \frac{1}{\mu - \lambda} \ln \frac{\mu}{\lambda}.$$

Experimentell wurden ermittelt die Werte, bzw. aus den Einstellungszeiten τ_η und τ_μ errechnet. $\lambda = 0{,}114$, $\eta = 0{,}204$, $\mu = 0{,}732$ bzw. 1,413 beim Ein- bzw. Ausschalten des Feldes. Aus der statischen Empfindlichkeit findet man $\frac{\alpha}{p} = 7$ absolute Einheiten, daraus erhält man für $q = 0{,}014$ cm², verglichen mit dem oben abgeschätzten Werte für die Halbkugel vom Radius 0,1 cm ein Wert, der mit der Annahme laminarer Strömung gut verträglich ist. Aus der Messung der Magnetostriktion der Luft ergab sich entsprechend dem mittleren Magnetfeld von $H = 20000$ Gauß für $\frac{\gamma}{\sigma_0} = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$, während aus der Theorie gemäß der Formel

[1]) Für Luft war bei den Versuchen $\sigma_0 = 0{,}0045$ mm Hg. Das in den Kolben K eingesaugte Volumen $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ cm³.

$$\left(\frac{\gamma}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{p}\right)\frac{\lambda}{\varkappa - \mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}$$

der Wert $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ errechnet wurde.

Die ungleichen Ausschläge beim Ein- bzw. Ausschalten des Magnetfeldes werden von der Theorie erklärt. Es zeigt sich, daß der maximale Ausschlag davon abhängt, wie sich das Magnetfeld mit der Zeit einstellt. Vergrößert man die Empfindlichkeit des Manometers mittelst eines dünneren Fadens, d. h. verkleinert man λ, so konvergiert der Ausdruck $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}$ gegen 1 und da $\varkappa >> \mu$ wird die Messung gemäß der Theorie von diesem Vorgang unabhängiger. Diese Resultate sind nur qualitativ zu bewerten, da alle in Betracht kommenden Fehlerquellen bisher noch nicht in ihrem Einfluß auf die Resultate abgeschätzt werden konnten. Durch günstigere Form des Kolbens, durch Vergrößerung seines Volumens und durch stärkere magnetische Felder kann die Genauigkeit der magnetischen Messungen noch vergrößert werden. Die vorliegenden Resultate sollten nur zeigen, daß die gemessene Empfindlichkeit des Instrumentes der Größenordnung nach richtig ist. Zur Messung der Suszeptibilität eines Gases wird das Manometer wohl besser als Nullinstrument[1]) verwendet.

1) Ein von A. Piccard angegebenes Mikromanometer hat O. E. Frivold als Nullinstrument beim Nachweis der Elektrostriktion der Gase verwendet. Diese Zeitschrift **21**, 603, 1921.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H., 24. Mai 1924.

(Eingegangen 26. Mai 1924.)

Die p- und d-Terme des Lithiums.

Von Felix Joachim v. Wiśniewski.

In einer hier kürzlich veröffentlichten Arbeit[1]) habe ich eine Theorie des Heliums entwickelt, die zu Resultaten führt, die mit der Erfahrung nicht im Widerspruche stehen.

Hier werde ich dieselbe Methode, die ich dort benutzte, auf das neutrale Lithium anwenden und als wahrscheinlich zeigen:

1. Daß das äußere (dritte) Elektron, wenn es in der Nähe des Rumpfes kreist, eine Raumkurve beschreibt.

2. Daß der p-Term durch die Hauptquantenzahl $+2$ und Nebenquantenzahl -1 bestimmt ist, in Übereinstimmung mit dem p-Term des Orthoheliums, der der Nebenquantenzahl

$$(n_2 - n_1) = -1$$

entspricht und in Widerspruch mit dem p-Term des Parheliums, für welchen die Nebenquantenzahl $+2$ ist.

Wir nehmen an, daß der Lithiumrumpf gebildet ist aus einem Kerne von der Ladung $+3e$ und zwei Elektronen, die den Kern diametral zueinander umkreisen in gleichen Abständen vom Kerne und auf gleicher einquantiger Kreisbahn.

Für den Radius a dieser Bahn und die Winkelgeschwindigkeit n der Elektronen haben wir:

$$a = \frac{h^2}{11 \cdot m \cdot \pi^2 \cdot e^2}; \quad n = \frac{121 \cdot m \cdot \pi^3 \cdot e^4}{2 \cdot h^3},$$

wo m die träge Masse und $-e$ die Ladung eines Elektrons bezeichnen.

Die Bewegungsgleichungen des äußeren Elektrons in dem rechtwinkligen Koordinatensysteme ξ, η, ζ, das mit dem Kerne fest verbunden ist, sind:

$$m \cdot \ddot{\xi} = -\frac{3e^2}{\varrho^3} \cdot \xi + \frac{e^2}{r_1^3}(\xi - \xi_1) + \frac{e^2}{r_2^3}(\xi - \xi_2),$$

$$m \cdot \ddot{\eta} = -\frac{3e^2}{\varrho^3} \cdot \eta + \frac{e^2}{r_1^3}(\eta - \eta_1) + \frac{e^2}{r_2^3}(\eta - \eta_2),$$

$$m \cdot \ddot{\zeta} = -\frac{3e^2}{\varrho^3} \cdot \zeta + \frac{e^2}{r_1^3}\zeta + \frac{e^2}{r_2^3}\zeta.$$

wo ξ, η, ζ die Koordinaten des äußeren Elektrons und $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$ die Koordinaten der beiden Elektronen des Rumpfes sind.

Für die Abstände ϱ, r_1, r_2 des äußeren Elektrons vom Kerne und von den beiden Elektronen des Rumpfes haben wir:

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2; \; r_1^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + \zeta^2; \; r_2^2 = (\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + \zeta^2.$$

Führen wir jetzt statt ξ, η, ζ; ξ_1, η_1; ξ_2, η_2, neue mit dem Rumpfe fest verbundene Koordinaten x, y, z; $a, 0, 0$; $-a, 0, 0$ durch folgende Relationen ein:

$$\xi = x \cdot \cos(nt) - y \cdot \sin(nt); \quad \xi_1 = a \cdot \cos(nt); \quad \xi_2 = -a \cdot \cos(nt),$$
$$\eta = x \cdot \sin(nt) + y \cdot \cos(nt); \quad \eta_1 = a \cdot \sin(nt); \quad \eta_2 = -a \cdot \sin(nt),$$
$$\zeta = z \quad ; \quad \zeta_1 = 0 \quad ; \quad \zeta_2 = 0.$$

1) Physik. Zeitschr. **25**, 297, 1924.

Die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten lauten:

$$m\ddot{x} - 2m \cdot n \cdot \dot{y} - m \cdot n^2 \cdot x = -\frac{3e^2}{\varrho^3} x + \frac{e^2}{r_1^3}(x-a) + \frac{e^2}{r_2^3}(x+a),$$

$$m\ddot{y} + 2m \cdot n \cdot \dot{x} - m \cdot n^2 \cdot y = -\frac{3e^2}{\varrho^3} \cdot y + \frac{e^2}{r_1^3} y + \frac{e^2}{r_2^3} y,$$

$$m\ddot{z} = -\frac{3e^2}{\varrho^3} \cdot z + \frac{e^2}{r_1^3} \cdot z + \frac{e^2}{r_2^3} \cdot z.$$

Das einzige bekannte Integral dieses Systems von Differentialgleichungen ist das Jacobische Integral:

$$\frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] - \frac{m}{2} \cdot n^2 \cdot (x^2 + y^2) - \frac{3e^2}{\varrho} + \frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2} = h,$$

wo:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad r_1^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2;$$
$$r_2^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2$$

ist.

Für die totale Energie E:

$$E = T - \frac{3e^2}{\varrho} + \frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2},$$

wo:

$$T = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2n(x\dot{y} - y\dot{x}) + n^2(x^2 + y^2)]$$

die kinetische Energie des Elektrons bezeichnet, erhalten wir unter Berücksichtigung des Jacobischen Integrals folgenden Ausdruck:

$$E = h_0 + m \cdot n \cdot (x\dot{y} - y\dot{x}) + m \cdot n^2 \cdot (x^2 + y^2).$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten ϱ, Θ, φ statt der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z erhalten wir für das Jacobische Integral, und für die kinetische und totale Energie folgende Ausdrücke:

(a) $$\frac{m}{2}[\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \cdot \dot{\Theta}^2 + \varrho^2 \cos^2\Theta \cdot \dot{\varphi}^2] - \frac{m}{2} \cdot n^2 \cdot \varrho^2 \cdot \cos^2\Theta - \frac{3e^2}{\varrho} + \frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r^2} = h_0,$$

(b) $$T = \frac{m}{2}[\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\Theta}^2 + \varrho^2 \cdot \cos^2\Theta \cdot \dot{\varphi}^2 + 2n \cdot \varrho^2 \cos^2\Theta \cdot \dot{\varphi} + n^2\varrho^2 \cos^2\Theta],$$

(c) $$E = h_0 + m \cdot n \cdot \varrho^2 \cdot \cos^2\Theta\dot{\varphi} + m \cdot n^2 \cdot \varrho^2 \cdot \cos^2\Theta,$$

weil:

$$x = \varrho \cdot \cos\Theta \cdot \cos\varphi; \quad y = \varrho \cdot \cos\Theta \sin\varphi;$$
$$z = \varrho \cdot \sin\Theta$$

ist.

Führen wir jetzt statt $\dot{\varrho}$, $\dot{\Theta}$, $\dot{\varphi}$ die Impulse ein:

$$p_\varrho = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varrho}} = m \cdot \dot{\varrho}; \quad p_\Theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} = m \cdot \varrho^2 \cdot \dot{\Theta};$$
$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\varrho^2 \cos^2\Theta(\dot{\varphi} + n),$$

so haben wir für (a), (b), (c):

(a') $$\frac{1}{2m}\left[p_\varrho^2 + \frac{p_\Theta^2}{\varrho^2} + \frac{p^2\varphi}{\varrho^2 \cos^2\Theta}\right] - n \cdot p_\varphi - \frac{3e^2}{\varrho} + \frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2} = h_0,$$

(b') $$T = \frac{1}{2m}\left[p_\varrho^2 + \frac{p_\Theta^2}{\varrho^2} + \frac{p_\varphi^2}{\varrho^2 \cos^2\Theta}\right],$$

(c') $$E = h_0 + n \cdot p_\varphi.$$

Da wir uns in folgendem auf den Fall beschränken, daß a klein gegen ϱ ist, so haben wir für $\frac{1}{r_1}$ und $\frac{1}{r_2}$ folgende Entwicklungen:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\varrho}\left[1 - 2\frac{a}{\varrho}\cos\bar{\omega} + \frac{a^2}{\varrho^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\varrho} + \frac{a}{\varrho^2}\cos\bar{\omega} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{\varrho^3}[3\cos^2\bar{\omega} - 1] + \ldots$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\varrho}\left[1 - 2\frac{a}{\varrho}\cos(\bar{\omega} + \pi) + \frac{a^2}{\varrho^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\varrho} - \frac{a}{\varrho^2}\cos\bar{\omega} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{\varrho^3}[3\cos^2\bar{\omega} - 1] + \ldots$$

wo $\bar{\omega}$ die Neigung des Radius ϱ gegen a bezeichnet.

Durch Addition erhalten wir:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{\varrho} + \frac{a^2}{\varrho^3}[3\cos^2\bar{\omega} - 1] + \ldots$$

Setzen wir jetzt statt $\cos^2\bar{\omega}$ seinen Mittelwert $\overline{\cos^2\bar{\omega}}$, so ist:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{\varrho} + \frac{a^2}{\varrho^3}[3\,\overline{\cos^2\bar{\omega}} - 1].$$

Durch Einsetzen dieses Wertes von $\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ in den Ausdruck des Jacobischen Integrals erhalten wir:

$$\frac{1}{2m}\left[p_\varrho^2 + \frac{p_\Theta^2}{\varrho^2} + \frac{p_\varphi^2}{\varrho^2\cos^2\Theta}\right] - n \cdot p_\varphi - \frac{e^2}{\varrho} + \frac{e^2a^2}{\varrho^3}[3\cos^2\omega - 1] = h_0.$$

Im Falle, daß das Elektron eine ebene Kurve beschreibt, haben wir:

$$\overline{\cos^2\omega} = \tfrac{1}{2}.$$

Im Falle aber, daß das Elektron eine Raumkurve beschreibt, haben wir:

$$\tfrac{1}{2} > \overline{\cos^2\tilde{\omega}} \geq \tfrac{1}{3}.$$

Je weniger die Raumkurve von einer Ebenenkurve abweicht, desto kleiner wird die Differenz von $[\frac{1}{2} - \overline{\cos^2\tilde{\omega}}]$.

Da aber bei großen Entfernungen des Elektrons vom Rumpfe seine Bewegungsbahn einer ebenen Kurve sich nähert, weil die auf dieses Elektron wirkende Kraft mit wachsender Entfernung zu einer Zentralkraft strebt, so folgt, daß je weiter das Elektron vom Rumpfe kreist, desto kleiner die Differenz von $[\frac{1}{2} - \overline{\cos^2\tilde{\omega}}]$ wird.

Wie leicht zu zeigen ist, ist das Jacobische Integral gleich der Hamiltonschen Funktion H dieses Problems.

Es folgt daraus, daß man zur Lösung dieses Problems kommt durch Separation der Veränderlichen in dem Jacobischen Integral.

Die Separation der Veränderlichen wird erreicht durch folgende Werte von p_ϱ, p_Θ, p_φ:

$$p_\varphi = A; \quad p_\Theta = \sqrt{\cdot a^2 - \frac{A^2}{\cos^2\Theta}},$$

$$p_\varrho = \sqrt{2m(h_0 + n\cdot A) + \frac{2me^2}{\varrho} - \frac{a^2}{\varrho^2} - 2m\frac{e^2a^2}{\varrho^3}[3\cos^2\tilde{\omega} - 1]}.$$

Es bleibt noch übrig, die Quantenbedingungen:

$$(\alpha)\ n_3 h = \oint p_\varrho \cdot d\varrho; \quad (\beta)\ n_1 h = \oint p_\varphi\, d\varphi;$$

$$(\gamma)\ n_2 h = \oint p_\Theta\, d\Theta$$

anzuwenden.

Aus der Quantenbedingung (β) erhalten wir:

$$n_1 h = 2n\cdot A.$$

Aus der Quantenbedingung (γ) erhalten wir durch Integration auf komplexem Wege:

$$2n\alpha = (n_2 - n_1)\cdot h.$$

Und endlich aus der Quantenbedingung (α) durch Anwendung der von Herrn Sommerfeld[1]) gegebenen Werte des Integrals:

$$\oint d\varrho \sqrt{A + \frac{2B}{\varrho} + \frac{C}{\varrho^2} + \frac{D_1}{\varrho^3}}$$

erhalten wir:

$$h_0 + n\cdot A = -\frac{N\cdot h}{\left[n + n_2 - n_1 + \frac{16\cdot\pi^4\cdot m^2\cdot e^4\cdot a^2}{h^3}\frac{[3\cos^2\tilde{\omega} - 1]}{(n_2 - n_1)^3}\right]^2},$$

wo N die Rydbergsche Konstante bezeichnet.

Durch Einsetzen des Wertes von $p_\varphi = A$ in den Ausdruck von E erhalten wir:

$$E = h_0 + n\cdot A.$$

Da aber $(h_0 + nA)$ bekannt ist, so haben wir für E:

$$E = -\frac{N\cdot h}{[n + n_2 - n_1 + \sigma]^2},$$

wo:

$$\sigma = \frac{16}{121}\cdot\frac{[3\cos^2\tilde{\omega} - 1]}{(n_2 - n_1)^3}$$

das Korrektionsglied ist.

Ist diese Formel richtig, so muß:

$$\overline{\cos^2\tilde{\omega}} = \frac{1}{3} + \frac{121}{48}\cdot\sigma\cdot(n_2 - n_1)^3 \leq \frac{1}{2}$$

$$[\sigma\cdot(n_2 - n_1)] > 0$$

sein.

Da bei dem Energieniveau d sich das Elektron in viel größerer Entfernung vom Rumpfe befindet als bei dem Energieniveau p, so ist nach dem früher Gesagten zu erwarten, daß bei dem p-Terme $\overline{\cos^2\tilde{\omega}}$ mehr von $\frac{1}{2}$ abweicht als bei dem d-Terme.

Wie wir aus der untenstehenden Tabelle sehen, ist diese Erwartung bestätigt[2]).

	σ	$(n_2 - n_1)$	$\overline{\cos^2\tilde{\omega}}$
p	$-0{,}045$	-1	0,447
d	$-0{,}0022$	-3	0,48

Wir haben für den p-Term $n_2 - n_1 = -1$ und nicht $n_2 - n_1 = -2$ angenommen, weil für $(n_2 - n_1) = -2$ $\overline{\cos^2\tilde{\omega}} > 1$ sollte sein, was unmöglich ist, so daß dieser Wert der Nebenquantenzahl zu verwerfen ist.

Aus dem früher Gesagten folgt also, daß die vom Elektron beschriebene Bahn für das Energieniveau p eine Raumkurve ist, weil für dieses Energieniveau $\overline{\cos^2\tilde{\omega}} = 0{,}447$ bedeutend kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, und daß diese Bahn für das Energieniveau d sehr nahe einer ebenen Kurve ist, da für dieses Energieniveau $\overline{\cos^2\tilde{\omega}} = 0{,}48$ ist, also sich sehr wenig von $\frac{1}{2}$ unterscheidet.

1) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien.

2) Die Werte von σ sind aus den numerischen Werten der p- und d-Terme berechnet, die dem Buche von Konen „Das Leuchten der Gase und Dämpfe" entnommen sind.

Die untenstehende Tabelle faßt die hier erhaltenen Resultate mit den früheren für das Helium erhaltenen zusammen:

	p $n_2 - n_1$	d $n_2 - n_1$
Lithium	− 1	− 3
Orthohelium . .	− 1	− 3
Parhelium . . .	+ 2	− 3

(Eingegangen 6. April 1924.)

Einwirkung des Magnetfeldes auf die Polarisation des Kanalstrahlenlichtes.

Von R. v. Hirsch.

In einer Veröffentlichung aus dem Jahre 1916[1]) war folgender Versuch beschrieben: Ein Bündel H-Kanalstrahlen geht in einer Entfernung von wenigen Zentimetern hinter den Kathodenlöchern durch ein Magnetfeld, dessen Stärke so gewählt ist, daß sie eben genügt, um die positiven bewegten Teilchen noch innerhalb der Polschuhe auszuscheiden. Unmittelbar hinter dem Feld wird das ausgesandte Licht auf seinen Polarisationszustand untersucht. Aus einer älteren Beobachtung von Stark[2]) ist bekannt, daß in der bewegten Intensität die parallel der Bewegungsrichtung des Kanalstrahls schwingende Lichtkomponente überwiegt: diese Polarisation erwies sich nach dem Durchgang durch das Magnetfeld deutlich verstärkt. Die Erklärung der beschriebenen Erscheinung wurde schon damals in Unterschieden im Leuchten der positiven und neutralen Teile des Strahls gesucht; heute scheint sie an Hand des Bohrschen Modells sehr einfach: Der positive Strahlteil, d. h. die freien H-Kerne leuchten nicht, erregen vielmehr nur das ruhende Gas auf ihrer Bahn; dieses Leuchten ist nach Stark nicht polarisiert. Der neutrale Teil des Strahls dagegen gibt sowohl bewegte — polarisierte — als ruhende — unpolarisierte — Intensität. Das Magnetfeld schafft den positiven Teil weg, bringt also die Polarisation stärker heraus.

So einfach und einleuchtend diese Erklärung aussieht, so ist sie doch mindestens unvollständig. Hiervon überzeugt man sich alsbald, wenn man den Versuch unter Variierung der magnetischen Feldstärke wiederholt. Man erhält dann Ergebnisse, wie sie folgendes Beispiel veranschaulicht:

Platte 19. $H\gamma$. $J_\parallel / J_\perp$.

Kanalstrahl im Feld = 0	0.66
= 700 Gauß	0.72
1400 „	0.81
2000 „	0.77
2400 „	0.65
Normalwert für unpolarisiertes Licht	0.60

Man sieht die Polarisation unter dem Einfluß des wachsenden Feldes bis etwa 1400 Gauß anwachsen, dann wieder fallen, um bei 2400 Gauß den Zustand des unpolarisierten Vergleichslichtes (Geißlerröhre) nahezu zu erreichen. Es scheint also neben der „reinigenden" Wirkung des Feldes (Ausscheidung der positiven Teile) noch ein anderer, die Polarisation zerstörender Einfluß vorhanden zu sein.

Die Versuche werden daher wieder aufgenommen und im spektral zerlegten Licht für die drei ersten Glieder der Balmerserie nach der früher beschriebenen Methode weitergeführt. Das Kanalstrahlrohr stand jetzt vertikal, Magnetfeld und Kollimator senkrecht aufeinander in der Horizontalebene, so daß der Beobachter beliebig nahe hinter dem Feldrande und auch zwischen den Magnetpolen arbeiten konnte; der Entladungsteil der Röhre steckte wieder in einem schweren Weicheisenschutz, als Stromquelle diente wie früher ein mit Wechselstrom ohne Unterbrecher gespeister Induktor. Die Zerlegung des Lichtes in seine polarisierten Komponenten geschah mit dem alten Doppelprisma, die spektrale Zerlegung mit dem Plangitter. Die Photogramme sind auf Platten verschiedener Herkunft, mit Pinacyanol sensibilisiert, aufgenommen, und mit dem Kochschen Photometer der Münchener Universität ausgemessen.

Die Ergebnisse sind in den folgenden Tabellen enthalten, und zwar stehen unter der Bezeichnung $J_\parallel / J_\perp$ unmittelbar die Ablesungen des Photometers ohne jede Korrektion, da die Versuche leider noch mit so großen Fehlern behaftet sind, daß sie nicht mehr als qualitative Richtigkeit beanspruchen können.

Die Versuchsbedingungen dieser Aufnahmen sind folgende:

1. Die Spannung ist entsprechend der Stromquelle nicht konstant, was aber nach bisheriger Erfahrung nicht stark ins Gewicht fällt.

2. Der Druck ist mit dem früher beschriebenen Hitzdrahtmanometer kontrolliert und konstant gehalten; er betrug bei allen mit derselben Röhre gemachten Aufnahmen ungefähr $7 \cdot 10^{-2}$ mm.

3. Die Reinigung des Gases wurde durch ein angeschaltetes Gefäß mit Kokoskohle in flüssiger Luft erreicht; sie war bei allen obigen Versuchen annähernd gleich gut, aber wohl nicht vollkommen.

1) R. v. Hirsch, Ann. d. Phys. **49**, 851, 1916.
2) J. Stark, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **8**, 104, 1906.

Tabelle I. H_α.

$J_\parallel / J_\perp$.

Lichtquelle	Magnetfeld	Platte 18	Platte 19	Platte 32	Mittel	Platte 20	Platte 21	Platte 31	Mittel
Geißlerröhre		1.11	1.04	—	1.07	1.12	1.05	—	1.08
Kanalstrahl		1.40	1.30	1.44	1.40	1.25	1.20	1.30	1.25
„	700 Gauß	1.20	1.30	1.19	1.25	1.25	1.14	1.27	1.22
„	1400 „	1.38	1.26	1.29	1.31	1.40	1.26	1.40	1.35
„	2000 „	1.19	1.11	1.12	1.14	1.11	1.11	—	1.11
„	2400 „	1.21	1.05	1.07	1.10	—	1.04	1.12	1.08
		Beobachtung zwischen den Polen				Beobachtung 5 cm hinter den Polen			

Tabelle II. H_β.

$J_\parallel / J_\perp$.

Lichtquelle	Magnetfeld	Pl. 19	Pl. 20	Pl. 21	Pl. 22	Pl. 31	Mittel
Geißlerröhre		0.75	0.81	0.84	0.80	—	0.80
Kanalstrahl		1.07	0.94	1.05	1.02	1.04	1.02
„	700 Gauß	0.98	1.05	0.99	0.98	1.00	1.00
„	1400 „	0.82	0.90	0.96	0.97	1.10	0.98
„	2000 „	0.87	—	—	0.92	0.88	0.88
„	2400 „	0.84	—	0.95	0.87	0.75	0.86

Tabelle III. H_γ.

$J_\parallel / J_\perp$.

Lichtquelle	Magnetfeld	Pl. 18	Pl. 19	Pl. 22	Pl. 23	Mittel
Geißlerröhre		0.70	0.66	—	—	0.68
Kanalstrahl		0.73	0.66	0.75	0.70	0.71
„	700 Gauß	0.80	0.72	0.74	0.76	0.75
„	1400 „	0.89	0.81	0.75	0.85	0.82
„	2000 „	0.84	0.77	0.69	0.80	0.77
„	2400 „	0.75	0.65	—	0.70	0.70

4. Von den Photogrammen sind nur diejenigen verwertet, welche in dem mittleren, für das Photometer günstigen Schwärzungsbereich liegen, alle anderen wurden verworfen. Die Konstanz des Schwärzungsverhältnisses innerhalb dieses Gebietes wurde durch Aufnahmen des Lichtes einer Geißlerröhre in verschiedener Stärke nochmals bestätigt. Die gleiche Geißlerröhre diente auch als Vergleichslicht, um den durch die Optik bedingten Polarisationszustand des Lichtes festzulegen; wie ersichtlich zeigen diese Ausgangswerte Abweichungen bis zu 10 Proz.; in dieser Größe ist also der Fehler der Photometrierung mit Einschluß der Plattenverschiedenheiten anzuschlagen; die darüber hinausgehenden Felder der Messungen beruhen auf Ursachen, welche sich bisher noch nicht genügend klären noch beheben ließen.

Aus den angeführten Messungen ergeben sich folgende Schlüsse:

1. Die Einwirkung des Magnetfeldes unterhalb 1500 Gauß entspricht bei H_γ den früheren Versuchen; dagegen zeigen H_α und H_β schon ohne Feld verglichen mit der Geißlerröhre sehr starke Polarisationen, die durch das Feld nicht mehr merklich gesteigert werden. Der früher gefundene Verstärkungseffekt ist durchaus verwischt. Dem entspricht es, daß jetzt beim Einschalten des Magnetfeldes keine merkliche Abnahme der Lichtintensität des Kanalstrahls eintrat, auch bei den Aufnahmen zur Erzielung gleicher Schwärzungen weder Belichtungszeit noch Stromstärke gesteigert zu werden brauchte, während bei den älteren Versuchen das Magnetfeld das Gesamtlicht um etwa 20 Proz. geschwächt hatte. Der Strahl enthielt offenbar diesmal weniger positive Teilchen, ohne daß hierfür ein bestimmter Grund angegeben werden könnte. Bei H_α ist ein deutlicher Unterschied zwischen der Beobachtung im Feld und hinter dem Feld erkennbar, bei den anderen Linien nicht.

2. Von etwa 1500 Gauß ab nimmt die Polarisation bei allen drei Linien deutlich ab, um bei 2400 Gauß fast ganz zu verschwinden. Dieser trotz aller Ungenauigkeit der Versuche unverkennbare Effekt ist als das wesentliche Ergebnis dieser Messungen anzusehen. Es

dürfte schwer fallen, für denselben eine ähnlich einfache Erklärung zu ersinnen, wie für die anfängliche Steigerung der Polarisation, etwa wieder eine Änderung in der Zusammensetzung des Strahls oder ähnliche sekundäre Dinge; vielmehr wird man hier wohl eine richtende Einwirkung des Magnetfeldes auf das leuchtende Atom selbst in Betracht ziehen müssen.

(Eingegangen 10. Juni 1924.)

Bemerkung zur Theorie der Durchmesserbestimmung von Sternen mittels des Interferometers.

Von Richard Gans.

Michelson und Pease[1]) haben die Durchmesser einiger Sterne mittels einer Interferenzmethode durch Veränderung des gegenseitigen Abstandes der beiden die Strahlen auffangenden Spiegel und Beurteilung der Sichtbarkeit der Interferenzstreifen bestimmt.

Die Sichtbarkeit der Streifen läßt sich dabei durch die Funktion

$$V = \frac{F(k,n)}{F(0,n)} \tag{1}$$

darstellen, wo

$$F(k,n) = \int_0^1 (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} \cos kx \cdot dx \tag{2}$$

ist. Hier ist

$$k = \frac{2\pi b R}{\lambda d} \tag{3}$$

dem Spiegelabstand b und dem Sternradius R direkt, der Wellenlänge λ und der Sternentfernung d umgekehrt proportional, und n ist ein Koeffizient, der davon abhängt, wie die Helligkeit der Sternscheibe von ihrem Mittelpunkt bis zum Rande variiert.

Prof. Moulton hat $F(k,n)$ für verschiedene Werte von n als Funktion von k ausgewertet, doch macht es den Eindruck, als ob es ihm entgangen ist, daß sich F, und damit V, in einfacher Weise durch die bekannten und in Tabellen niedergelegten Besselschen Funktionen ausdrücken lassen.

Der Zweck dieser Notiz ist, kurz darauf hinzuweisen, da zu erwarten steht, daß die Methode in Zukunft vielfache Anwendung finden wird.

Bekanntlich stellt sich die Besselsche Funktion $n$ter Ordnung folgendermaßen dar

$$J_n(k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Pi(n-\frac{1}{2})} \left(\frac{k}{2}\right)^n \int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos kx \cdot dx, \tag{4}$$

also ist

$$F(k,n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Pi(n+\tfrac{1}{2}) \left(\frac{2}{k}\right)^{n+1} J_{n+1}(k), \tag{5}$$

und da

$$\lim_{k=0} \left(\frac{2}{k}\right)^{n+1} J_{n+1}(k) = \frac{1}{\Pi(n+1)} \tag{6}$$

ist, so wird nach (1)

$$V = V_n(k) = \Pi(n+1) \left(\frac{2}{k}\right)^{n+1} J_{n+1}(k). \tag{7}$$

Insbesondere mögen die für die Messungen in Frage kommenden ersten beiden Wurzeln k_1 und k_2 von V für verschiedene n angegeben werden. Ich entnehme sie für $n = -1; 0, 1; 2$ den Tabellen von Jahnke und Emde. Für $n = -\frac{1}{2}$ sind die Wurzeln die Vielfachen von π, für $n = +\frac{1}{2}$ die bekannten Wurzeln der Gleichung $k = \operatorname{tg} k$, die sich auch in dem zitierten Tafelwerk finden, während ich sie für $n = \frac{3}{2}$ aus der Gleichung

$$\left(\frac{3}{k^2} - 1\right) \sin k = \frac{3}{k} \cos k$$

berechnet habe. Es ergibt sich[1])

n

	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
k_1	2,4048	3,1416	3,8317	4,4934	5,1356	5,7635	6,379
k_2	5,5201	6,2832	7,0156	7,7253	8,417	9,0951	9,760
$\frac{k_1}{k_2}$	0,43564	0,50000	0,54616	0,58166	0,6101	0,63368	0,6536

Da die Verfasser es nicht für ausgeschlossen halten, bei Vervollkommnung der Methode die beiden Stellungen b_1 und b_2, in denen die Interferenzstreifen zum ersten und zweiten Male verschwinden, mit genügender Genauigkeit zu bestimmen, so würde ihr Quotient $\frac{b_1}{b_2} = \frac{k_1}{k_2}$ mittels der obigen Tabelle den Wert von n ergeben. Kennt man ihn, so entnimmt man wiederum

1) A. A. Michelson and F. G. Pease, Astrophysical Journal **8**, 1921.

1) Die negativen Werte von n werden keine physikalische Bedeutung haben. Sie sind nur hinzugefügt, um bessere Interpolationsmöglichkeit zu geben.

der Tabelle k_1, woraus sich dann $R = \frac{k_1 \lambda d}{2\pi b_1}$ berechnet.

Die Interpolationsformel

$$n = -1 + 75\left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{1}{2}\right)^2,$$

welche die Herren Michelson und Pease für die Beziehung zwischen n und $\frac{k_1}{k_2}$ angeben, stimmt mit unseren Werten nicht überein und scheint unrichtig zu sein. Dagegen stellt

$$n = -0{,}480 + 67{,}36\left(\frac{k_1}{k_2} - 0{,}4617\right)^2$$

zwischen $n = 0$ und $n = 2$ eine gute Näherung dar. Ebenso lassen sich innerhalb derselben Grenzen die Wurzeln k_1 und k_2 durch die Formeln

$$k_1 = 3{,}832 + 1{,}333\,n - 0{,}030\,n^2$$
$$k_2 = 7{,}016 + 1{,}430\,n - 0{,}029\,n^2$$

darstellen.

La Plata, Instituto de Física, 30. März 1924.

(Eingegangen 16. Juni 1924.)

BESPRECHUNGEN.

W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Zweite Auflage. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. I. 8°. 242 S. m. 40 Textfiguren. Berlin, Julius Springer. 1924. M. 11.—, geb. M. 12.—.

Die erste Auflage dieses Buches wurde bereits im Bd. 24, S. 21 dieser Zeitschrift besprochen. Die jetzige Auflage ist im allgemeinen nur in einigen Punkten erweitert, enthält aber als Zusatz den in der ersten Auflage postulierten, von Herrn Reidemeister erbrachten Beweis des Satzes, daß die Kugel die einzige Fläche ist, bei der die geodätische Entfernung konjugierter Punkte fest ist. Die Tatsache, daß das Buch trotz der schweren Zeitverhältnisse so rasch eine zweite Auflage erlebte, zeugt für seine hervorragende Güte. Von den vielen Vorzügen des Buches will ich nur zwei hervorheben: 1. die konsequente vektorielle Behandlung, welche die Differentialgeometrie erst übersichtlich macht und ein Eindringen wesentlich erleichtert; 2. die Heranziehung der Fragen der „Differentialgeometrie im großen", die, wie der Verfasser mit Recht hervorhebt, zu den reizvollsten, allerdings auch schwierigsten der Wissenschaft gehören. Aus dem letzteren Fragekreise stammt auch das von Herrn Reidemeister gelöste, oben erwähnte Problem. Möge auch die zweite Auflage des Buches befruchtend wirken! Hilb.

Astronomischer Kalender für 1924. Herausgegeben von der Universitäts-Sternwarte zu Wien. 8°. 155 S. Wien VIII, Carl Gerold's Sohn. 1924. Geb. Gz. 5.50.

Dieser im 43. Jahrgang erscheinende Kalender der Wiener Universitäts-Sternwarte, der umfassendste dieser Art in deutscher Sprache, enthält alle diejenigen Daten, die der Liebhaberastronom im allgemeinen für seine Beobachtungen braucht. Den Angaben über das Sonnensystem (einschließlich der Konstellationen und Erscheinungen der Jupitermonde) ist ein Verzeichnis heller Fixsterne und wichtiger Veränderlicher, Doppelsterne und Nebelflecke beigefügt. In einer Beilage „Über die Vorgänge im Atominnern und deren Beziehungen zur Physik der Sterne" gibt W. E. Bernheimer einen guten und leichtverständlichen Überblick über die astronomischen Beobachtungstatsachen, welche durch die Atomtheorie weitere Klärung erfahren haben. A. Kopff.

Berichtigung.

In dem Aufsatz von P. Ludewig, Messungen des Emanationsgehaltes der radioaktiven Quellen in Brambach und Oberschlema (diese Zeitschr. **25**, 281, 1924), Tab. II u. III lies 18. Dezember 1922 statt 18. Dezember 1923.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn Dr. E. Mürmann (bisher Privatdozent an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag) für analytische Chemie.

Ernannt: Der Präsident des Telegraphentechnischen Reichsamtes in Berlin Professor Dr. ing. ehr. Karl Wagner zum Honorarprofessor an der Technischen Hochschule in Charlottenburg, das wissenschaftliche Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie in Berlin-Dahlem Professor Dr. Otto Hahn (nach Ablehnung der Berufung zum ord. Professor der physikalischen Chemie an der Technischen Hochschule Hannover) zum zweiten Direktor des genannten Institutes, der Leiter der Meßwerkzeug-Abteilung der Firma Ludwig Loewe in Berlin Professor Dr. Georg Berndt zum a. o. Professor für Meßtechnik an der Technischen Hochschule Dresden, der ord. Professor der physikalischen Chemie und Elektrochemie an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Georg Grube in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule Hannover, der Privatdozent an der Universität München Dr. H. Grimm zum Konservator am chemischen Institut der Universität Würzburg, unter Verleihung des Titels eines a. o. Professors.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor für chemische Technologie und Elektrochemie an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Ernst Berl (zwecks Übertritts in die Praxis).

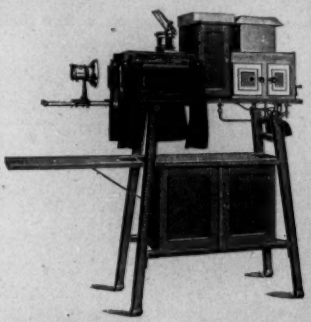
Ehrung: Das wissenschaftliche Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie in Berlin-Dahlem Fräulein Professor Dr. Lise Meitner erhielt von der Preußischen Akademie der Wissenschaften die silberne Leibnizmedaille für ihre Forschungen über β- und γ-Strahlen.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

MAX KOHL A.G. Chemnitz

Physikalische Apparate
Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel
in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel: 4 Große Preise;
Turin: 2 Große Preise; Dresden: Großer Preis.



Kohls Megadiaskop. Projektions-Apparat für alle im Unterricht gebräuchlichen Projektionsarten, z. B. für durchfallendes Licht, für auffallendes Licht, für Mikroprojektion, Spektral-, Polarisations-Interferenzerscheinungen usw.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Neuerscheinung

Geschichte des Deutschen Reiches 1871–1924

von **Dr. Johannes Hohlfeld**

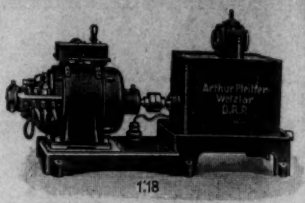
XII u. 788 Seiten m. Reg. 8°. Geheftet Gm. 13.– $ 3.10, Ganzleinenband Gm. 15.– $ 3.60

Aus dem Inhalt: Die Reichsgründung. Bureaukratie. Konservative Fronde. Kulturkampf. Sozialistengesetz. Reichseisenbahnen. Dreikaiserbündnis. Der neue Kurs. Polenpolitik. Flottengesetze. Kolonialfragen. Marokkokrise. Balkankrise. Kriegsausbruch. Weltkrieg und Wandlung. Friedensvertrag. Kapp-Putsch. Erfüllungspolitik. Ruhrkrieg. Große Koalition. Ermächtigungsgesetze. Hitler-Putsch. Reichstagsauflösung Februar 1924.

*

Aus dem Studium der Vergangenheit beurteile man die geschichtlichen Notwendigkeiten der Gegenwart und Zukunft. Hohlfelds Werk bietet hierzu die Möglichkeit. Es bringt die organische Entwicklung des Staates – des Deutschen Reiches – als eines Lebewesens mit eigenen Gesetzen zur Darstellung. Die Fragen der jüngsten Vergangenheit lernt man aus der geschichtlichen Entwicklung heraus verstehen.

Pfeiffer's



1:18

Rotierende Öl-Luftpumpe D.R.P.

Hochvakuum-Pumpen, Vakua bis $^1/_{1\,000\,000}$ mm Hg.
Saugleistung bis 50 cbm per Stunde
Photometer aller Systeme
Öl-Prüfapparate, Schnellviskosimeter usw.
Funken-Induktoren bis 1000 mm Funkenlänge
Doppel-Pendelgleichrichter
Oscillographen

Quecksilber-Dampfstrahlpumpe
ganz aus Stahl D. R. P. angem.

1:20

Vgl. Techn. Physik, 1922, Heft 12. Phys. Ztschr. 1922, pag. 463.

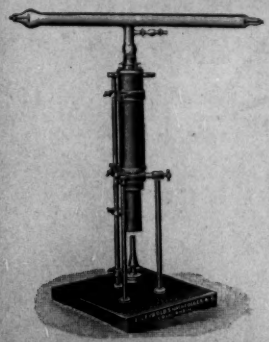
15 Liter bis zum Aussetzen jeder Entladung in 10 Sek. vom Vorvakuum ab.
Listen von Abt. H anfordern.

Arthur Pfeiffer
Wetzlar 8
Telegr. Vakupfeif. — Tel. 85 u. 86.

Neue Hochvakuum-Diffusions-Pumpe aus Metall

nach Prof. Gaede

D.R.P. und Auslandspatente angemeldet


$^1/_{10}$ nat. Gr.

Saugleistung: 15 Liter per Sek.
Vorvakuum: 20 mm
„Vergl. Zeitschrift für Technische Physik, Jahrg. 1923, Nr. 10"

Alleinige Hersteller

E. Leybold's Nachfolger A.-G.
Köln a/Rhein, Brüderstr. 7

Sonderliste auf Wunsch

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.